गणित

मिडिल स्कूलों के लिए

पुस्तक II भाग II

कक्षा VII के लिए पाठ्यपुस्तक

एस० डी० चोपड़ा   के० सी० मदान

संपादक

मनमोहन सिंह अरोरा

महेन्द्र शंकर

विद्ययाऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी

NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

प्रथम संस्करण
मई 1979
वैशाख 1901

पुनर्मुद्रण
मार्च 1980
चैत्र 1902

फरवरी 1981
माघ 1902

अप्रैल 1983
वैशाख 1905

P.D. 17 T—SD

मुख पृष्ठ चित्र : सी० पी० टंडन

मूल्य : रु० **4.15**

प्रकाशन विभाग में, श्री विनोद कुमार पंडित, सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली - **110016** द्वारा प्रकाशित तथा माया इन्टर प्राईजज, शाहदरा दिल्ली-110032 में मुद्रित।

प्राक्कथन

यह पुस्तक "मिडिल स्कूलों के लिए गणित" पुस्तकमाला के अंतर्गत पुस्तक II का भाग II है। यह पुस्तक उसी आधार पर लिखी गई है जिस आधार पर राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् द्वारा ही इससे पहले की पुस्तकें, पुस्तक I तथा पुस्तक II का भाग I तैयार की गई थीं। इसमें वास्तविक जीवन की स्थितियों को सुदृढ़ करने में सहजज्ञान और पर्यवेक्षण के प्रयोग पर बल दिया गया है तथा गणित को एक सरल और सुन्दर ढंग से प्रस्तुत किया गया है।

इस पुस्तक का प्रथम प्रारूप कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय के गणित विभाग के वरिष्ठ प्रोफेसर और अध्यक्ष (अवकाश प्राप्त) प्रो० एस० डी० चोपड़ा तथा विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के डा० के० सी० मदान द्वारा तैयार किया गया। फिर इस प्रारूप को फरवरी और मार्च 1978 में राष्ट्रीय शिक्षा संस्थान कैम्पस में तथा अगस्त 1978 में अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय में आयोजित बैठकों में गणित शिक्षकों और विषय-विशेषज्ञों के एक समूह को दिखाया गया। मैं लेखकों प्रोफेसर एस०डी० चोपड़ा और डा० के०सी० मदान का उनके अद्वितीय योगदान के लिए तथा कार्यशिविर में भाग लेने वाले व्यक्तियों का उनकी प्रतिक्रियाओं और सुझावों के लिए अत्यंत आभारी हूँ।

अंतिम लेखन और विषय-संपादन का कार्य प्रो० मनमोहन सिंह अरोरा और श्री महेन्द्र शंकर ने अपने हाथ में लिया। इसके हिन्दी संस्करण की देख-रेख श्री महेन्द्र शंकर और डा० के० सी० मदान ने की। मैं इनमें से प्रत्येक के प्रति आभार प्रकट करता हूँ विशेष रूप से प्रो० मनमोहन सिंह अरोरा के प्रति जिन्होंने इस कार्य को इतनी अच्छी प्रकार से अल्प-समय में ही पूर्ण किया।

परिषद् ने शिक्षकों और विद्यार्थियों से प्राप्त समालोचनाओं के आधार पर सदैव अपनी शैक्षिक सामग्री में सुधार करने का प्रयत्न किया है। हम अगले संस्करण में संभव सुधार हेतु उनकी प्रतिक्रियाओं का कृतज्ञता से स्वागत करेंगे।

शिब के० मित्र
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान
और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
सितम्बर, 1978

प्रस्तावना

यह पुस्तक "मिडिल स्कूलों के लिए गणित" पुस्तकमाला में कक्षा VII के लिए पुस्तक का भाग II है। यह भाग I की अगली लड़ी है। इसमें जो कुछ दिया गया है वह सामान्यतया व्यावसायिक गणित, ज्यामिती और सांख्यिकी विषय शीर्षकों के अंतर्गत पढ़ाया जाता है।

लगभग पिछले दस वर्षों से जब से, हमारे देश में तथाकथित "आधुनिक" गणित का सूत्रपात हुआ, विद्यमान परिस्थितियों में उसकी उपयोगिता और विद्यार्थियों में उसके प्रति अभिरुचि के बारे में चिन्ता बढ़ती जा रही है। सामग्री को पढ़ाने में शिक्षकों को कठिनाइयों का सामना करना पड़ा, विद्यार्थियों को संकल्पनाएँ समझने में कठिनाई हुई तथा अभिभावकों ने, इच्छा होते हुए भी, गणित के अध्ययन में अपने बच्चों की सहायता करने में अपने को असमर्थ पाया।

अतः राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् को गणित के पाठ्य-क्रम में विस्तृत संशोधन करने का कार्य अपने हाथ में लेना पड़ा। इस कार्य में जो केवल एक मार्गदर्शक उद्देश्य था वह यह था कि हम बच्चे को किसी स्तर पर जो गणित पढ़ाते हैं उसे न केवल सरलता से उसके समझने योग्य होना चाहिए बल्कि उसको उसके वातावरण से भी यथा सम्भव सम्बन्धित होना चाहिए। इसके साथ ही, हमारे विकास के लक्ष्यों और हमारे उपलब्ध साधनों के परिप्रेक्ष्य में इसे हमारे समाज की आवश्यकताओं के अनुकूल भी होना चाहिए।

इस पुस्तक का प्रथम प्रारूप कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय के गणित विभाग के वरिष्ठ प्रोफेसर और अध्यक्ष (अवकाश प्राप्त) प्रो० एस० डी० चोपड़ा तथा विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के डा० के० सी० मदान द्वारा तैयार किया गया। फिर गणित शिक्षकों, विषय विशेषज्ञों एवं राज्य शिक्षा संस्थानों / राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थानों के प्रतिनिधियों के एक समूह द्वारा अपने अनुभव और पृष्ठभूमि के आधार पर इसका समालोचन किया गया। तदुपरान्त मैंने अपने साथी श्री महेन्द्र शंकर के साथ इस पुस्तक का संपादन कार्य अपने हाथ में लिया।

इस पुस्तक के हिन्दी संस्करण की देख-रेख श्री महेन्द्र शंकर और डा० के० सी० मदान ने की।

मुझे कार्यशिविर में भाग लेने वाले व्यक्तियों के प्रति उनके योगदान के लिए, प्रो० एस० डी० चोपड़ा के प्रति उनके परिषद् में हमारे कार्य से संबद्ध होने के लिए तथा अपने साथियों डा० के० सी० मदान और श्री महेन्द्र शंकर के प्रति अपनी कृतज्ञता अवश्य प्रकट करनी चाहिए।

मैं इस पुस्तक की कुछ विशेषताओं को बताना चाहूँगा जो कि पुस्तकमाला की पहली पुस्तकों में भी विद्यमान थीं और वे नीचे दी जा रही हैं :

(i) किसी संकल्पना का ज्ञान कराने से पहले बच्चे को अभिप्रेरित करने के लिए उपयुक्त उदाहरण दिए गए हैं ;

(ii) भाषा सरल और रोचक है। 12^+ से 13^+ की आयु के बच्चे की शब्दावली को ध्यान में रखा गया है ;

(iii) समुचित हल किए हुए प्रश्नों के उदाहरण प्रचुर मात्रा में दिए गए हैं ताकि विद्यार्थी संकल्पना के अनुप्रयोग में अभिरुचि ले सके ;

(iv) जहाँ तक हो सका है, अनावश्यक आधुनिक शब्दावली और लिपिचिन्हों को छोड़ दिया गया है ;

(v) पुस्तक को छोटे एककों में विभाजित किया गया है। प्रत्येक एकक के प्रारम्भ में यह बताया गया है कि इस एकक में क्या है तथा प्रत्येक एकक के अंत में मुख्य संकल्पनाओं की एक सूची दी गई है ताकि विद्यार्थी यह तुरन्त स्मरण कर सके कि एक विशेष एकक में उसने क्या पढ़ा है ;

(vi) प्रत्येक एकक में जो प्रश्नावलियाँ दी गई हैं वे इस अभिप्राय से दी गई हैं कि शिक्षकों को तुरन्त संभव प्रश्नों का एक बैंक प्राप्त हो जाए ताकि वे विभिन्न योग्यता-स्तर के विद्यार्थियों की आवश्यकताओं को भली भाँति पूर्ण कर सकें ;

(vii) उपयुक्त स्थानों पर विविध प्रश्नावलियों को सम्मिलित किया गया है ताकि विद्यार्थी सामग्री का आकस्मिक पुनरावलोकन कर सके ;

(viii) कठिन प्रश्न और अनुच्छेद तारांकित किये गए हैं ;

(ix) विभिन्न स्थानों पर "क्यों ?" लगा दिया गया है ताकि उत्तर ज्ञात करने के प्रक्रम में विद्यार्थी को अपने विचार सुदृढ़ बनाने में सहायता मिल सके। अतः शिक्षक से यह आशा की जाती है कि वह स्वयं इनके उत्तर देने के बदले विद्यार्थी को इनके उत्तर देने के लिए प्रेरित करे ;

(x) विविध प्रश्नावलियों के अतिरिक्त प्रत्येक प्रश्नावली में प्रश्न सरलता से कठिनता के क्रम में दिए गए हैं।

अब विद्यार्थी के लिए दो शब्द कहना उचित ही होगा :

आप गणित की इस पुस्तक को पढ़ने जा रहे हैं। यदि आप प्रारम्भ से ही सीखने की कुछ 'अच्छी' आदतें अपना लें तो आप गणित के अध्ययन को आकर्षक और अधिक सार्थक पाएँगे। सीखने की कुछ 'अच्छी' आदतें नीचे सुझाई गई हैं :

1. गणित केवल कार्य करने से सीखा जाता है। अपनी पाठ्य पुस्तक को केवल पढ़िए ही नहीं। आपको अपने पास सदैव एक पेंसिल और कागज रखना चाहिए और पुस्तक के अनुसार 'कार्य' करना चाहिए।

2. पुस्तक में जहाँ आपको "क्यों ?" मिले, आपको उसका उत्तर प्रदान करने का प्रयत्न करना चाहिए।

3. किसी विशेष प्रश्न पर अधिक समय कभी न लगाएँ। यह सदैव अच्छा है कि आप अगले प्रश्न पर चले जाएँ तथा कुछ समय बाद ताज़े दिमाग से उस प्रश्न पर वापिस आएँ जो आपको कठिन लग रहा था।

4. मनुष्य के मस्तिष्क रूपी भंडार में केवल सीमित सूचनाएँ ही रखने की क्षमता है। जिसका प्राय: प्रयोग नहीं होता उसे भंडार से निकाल दिया जाता है। इसलिए यह अच्छा होगा कि आप प्रत्येक एकक में मूलभूत परिणामों का एक सारांश बना लें तथा समय-समय पर इनका पुनरावलोकन करें।

हो सकता है कि हमारे भरसक प्रयत्नों के बावजूद कुछ अनचाही त्रुटियाँ रह गई हों। इनमें से कोई भी त्रुटि बताए जाने पर परिषद् प्रसन्नतापूर्वक उन्हें स्वीकार करेगी और साथ ही इस पुस्तक के अगले संस्करणों में सुधार हेतु किन्ही भी सुझावों का परिषद् स्वागत करेगी।

नई दिल्ली
नवम्बर, 1978

मनमोहन सिंह अरोरा
संपादक

कृतज्ञताज्ञापन

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् निम्नलिखित व्यक्तियों की आभारी है जिन्होंने फरवरी और मार्च 1978 में राष्ट्रीय शिक्षा संस्थान, नई दिल्ली में आयोजित बैठकों में इस पाठ्य पुस्तक की मूल सामग्री की समीक्षा की :

1. डा० मनमोहन सिंह अरोरा
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
2. डा० राम अवतार
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
3. श्री सी० आर० बब्बर
   1270, डा० मुकर्जी नगर, दिल्ली
4. श्रीमती प्रवीण भल्ला
   केन्द्रीय विद्यालय, टैगोर गार्डन, नई दिल्ली
5. श्री ईश्वर चन्द्र
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
6. श्री भगवान दास
   शिक्षा अधिकारी, क्षेत्र XI, राजेन्द्र नगर, नई दिल्ली
7. श्री जी० डी० ढल
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
8. डा० एस० के० सिंह गौतम
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
9. श्री पी० एल० गोयल
   दिल्ली पब्लिक स्कूल, मथुरा रोड, नई दिल्ली

10. श्री एम० सी० गुप्ता
डी० ए० वी० उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, चित्रगुप्त रोड, नई दिल्ली

11. डा० आर० पी० गुप्ता
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

12. कु० के० एम० जैन
एल० डी० जैन उच्चतर माध्यमिक बालिका विद्यालय, दिल्ली

13. श्री जे० पी० कन्सल
एयर फोर्स सैन्ट्रल स्कूल, सुबरोतो पार्क, नई दिल्ली

14. डा० (श्रीमती) अरुणा कपूर
जामिया मिलिया इस्लामिया, नई दिल्ली

15. श्री आर० एस० कोठारी
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

16. डा० रविन्द्र कुमार
रामजस कालेज, दिल्ली

17. डा० के० सी० मदान
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

18. श्रीमती कंचन मानकतला
गार्गी कालेज, नई दिल्ली

19. कु० जे० मंसुखानी
लेडी इरविन हायर सैकेन्डरी स्कूल, नई दिल्ली

20. कु० सरम्मा मथाई
इन्द्रप्रस्थ महिला कालेज, दिल्ली

21. कु० ऊषा मेहता
दिल्ली पब्लिक स्कूल, आर०के० पुरम, नई दिल्ली

22. श्रीमती संतोष महेन्द्रू
राजकीय उच्चतर माध्यमिक बालिका विद्यालय, मालवीय नगर, नई दिल्ली

23. श्री उमेश नारायन
राजकीय उच्चतर माध्यमिक बालक विद्यालय, सैक्टर V, II शिफ्ट, आर० के० पुरम, नई दिल्ली

24. डा० आत्मा राम साहू
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

25. कु० कमला साहनी
ब्रिटिश स्कूल, चाणक्यपुरी, नई दिल्ली

26. श्री आर० एस० शाकिर
शिक्षा निदेशालय, दिल्ली

27. श्री महेन्द्र शंकर
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

28. श्री आई० डी० शर्मा
केन्द्रीय विद्यालय, आई० आई० टी० कैम्पस, नई दिल्ली

29. श्रीमती सरोज शर्मा
स्प्रिंगडेल्स स्कूल, पूसा रोड, नई दिल्ली

30. श्री बलवीर सिंह
राजपूताना रायफल्स हीरोज मैमोरियल हायर सैकेन्डरी स्कूल, दिल्ली कैन्ट

31. श्री बलदेव सिंह
राज्य शिक्षा संस्थान, दिल्ली

32. श्री सज्जन सिंह
राजकीय उच्चतर माध्यमिक बालक विद्यालय, सैक्टर 7, आर०के० पुरम, नई दिल्ली

33. श्रीमती सुशम सूद
केन्द्रीय विद्यालय, एन्डरूज गंज, नई दिल्ली

34. श्री यशपाल वर्मा
नवयुग स्कूल, सरोजिनी नगर, नई दिल्ली

परिषद् निम्नलिखित व्यक्तियों की भी आभारी है जिन्होंने इस पाठ्य-पुस्तक की सामग्री का समीक्षात्मक विवेचन अगस्त 1978 में गणित विभाग, अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय अलीगढ़ में इसी उद्देश्य हेतु आयोजित एक कार्यशिविर में किया :

1. डा० मनमोहन सिंह अरोरा
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
2. डा० राम अवतार
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
3. श्री सी० आर० बब्बर (अवकाश प्राप्त)
   डी० आई० खान बी० एस०एच०एस० स्कूल, न्यू राजेन्द्र नगर, नई दिल्ली
4. श्री बी० आर० छाबड़ा
   राजकीय उच्चतर माध्यमिक बाल विद्यालय न० 1, मदनगीर, नई दिल्ली
5. डा० के० पी० चिन्दा
   हिन्दू कालेज, दिल्ली
6. डा० एस० डी० चोपड़ा (अवकाश प्राप्त)
   कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र
7. श्री जी० डी० ढल
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
8. श्री डी० एस० धांजेल
   राजकीय माडल उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, लुडलो केसल न० 1, दिल्ली
9. डा० एस० के० सिंह गौतम
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
10. श्री एम० सी० गुप्ता
    डी० ए० वी० सीनियर सैकेन्डरी स्कूल, चित्रगुप्त रोड, नई दिल्ली
11. डा० आर० पी० गुप्ता
    राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
12. डा० एस० इजहार हुसैन
    अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय, अलीगढ़

13. श्री सगीर उल इस्लाम
    एम० यू० सिटी हाई स्कूल, अलीगढ़

14. डा० रविन्द्र कुमार
    रामजस कालेज, दिल्ली

15. डा० के० सी० मदान
    राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

16. श्रीमती कंचन मानकतला
    गार्गी कालेज, नई दिल्ली

17. श्री के० के० मरवाह
    राजकीय उच्चतर माध्यमिक बाल विद्यालय नं० 3, सरोजिनी नगर, नई दिल्ली

18. श्री बी० नायडू
    राजकीय जूनियर कालेज, अलिया, हैदराबाद

19. श्री एम० नसीम
    आर्मी पब्लिक स्कूल, धौला कुआँ, नई दिल्ली

20. श्री एस० रंगास्वामी
    केन्द्रीय विद्यालय, गोल मार्केट, नई दिल्ली

21. डा० ए० आर० साहू
    राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

22. श्री आर० एस० शाकिर
    शिक्षा निदेशालय, दिल्ली

23. श्री महेन्द्र शंकर
    राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

24. श्रीमती हमीदा शौकत
    ए० एम० यू० गर्ल्स हाई स्कूल, अलीगढ़

25. डा० सतीश शिराली
    पंजाब विश्वविद्यालय, चण्डीगढ़

26. डा० ए० एच० सिद्दीक़ी
अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय, अलीगढ़

27. डा०बी०वी० सिंगबाल
टाटा इंस्टीटयूट ऑफ फन्डामैन्टल रिसर्च, बम्बई

28. श्री बलबीर सिंह
राजपूताना रायफल्स हीरोज मैमोरियल हायर सैकेन्डरी स्कूल, दिल्ली कैन्ट

29. श्री यशपाल वर्मा
नवयुग स्कूल, सरोजिनी नगर, नई दिल्ली

30. श्री एस० के० वासन
रामजस कालेज, दिल्ली

31. मुहम्मद जहीरउद्दीन
सैफुद्दीन ताहिर हाई स्कूल, अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय, अलीगढ़

पुस्तक में प्रयुक्त गणित के संकेत

$=$	:	के समान है
$\triangle$	:	त्रिभुज
$\angle$	:	कोण
$<$	:	से छोटा है
$>$	:	से बड़ा है
$\leqslant$	:	से छोटा है या के बराबर है
$\geqslant$	:	से बड़ा है या के बराबर है
$\cong$	:	के सर्वांगसम है
$\parallel$	:	के समांतर है
$\perp$	:	पर लम्ब है
$\sqrt{}$	:	का धनात्मक वर्गमूल
$\%$	:	प्रतिशत

विषय-सूची

एकक XII

सममिति

हम ज्यामितीय आकृतियों की रेखाओं के सापेक्ष सममिति अर्थात् रैखिक सममिति (linear symmetry) तथा सममित आकृतियों के कुछ गुणों से पहले से ही परिचित हैं। अब हम रैखिक सममिति के कुछ और गुणों को सीखेंगे। हम एक बिंदु के सापेक्ष सममिति का भी अध्ययन करेंगे और सीखेंगे कि सममिति के गुणों का प्रयोग करके किस प्रकार कुछ रचनाएँ की जाती हैं।

12.1 पुनरावलोकन

आपको रैखिक सममिति की संकल्पना और सममित आकृतियों के गुणों का पुनरावलोकन करना चाहिए। विशेष रूप से आपको निम्न का पुनरावलोकन करना चाहिए :

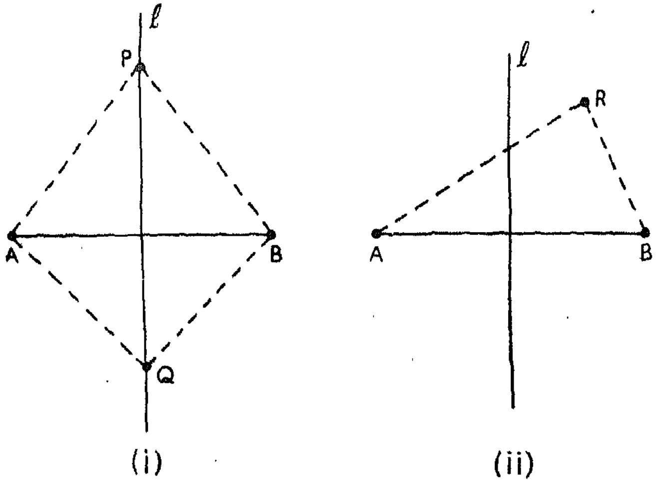
रेखा के सापेक्ष सममिति : सममित, सममिति अक्ष/रेखा, दर्पण प्रतिबिम्ब।
सममित आकृतियों के युग्म : सर्वांगसमता।
सममित और असममित आकृतियाँ : सममिति अक्ष।

12.2 सममिति अक्ष पर स्थित बिंदु

हम पहले से ही जानते हैं दो दिए हुए बिंदुओं की सममिति अक्ष/रेखा (axis/line of symmetry) की रचना किस प्रकार की जाती है। अब हम सममिति अक्ष पर स्थित बिंदुओं के एक महत्वपूर्ण गुण का अध्ययन करेंगे।

मान लीजिए A और B दो दिए हुए बिंदु हैं तथा l उनकी सममिति अक्ष है।

आइए l पर कोई बिंदु P लें तथा P और A और P और B को मिलाएँ। [देखिए आकृति 12.1(i)] हम PA और PB के बारे में क्या कह सकते हैं ?



आकृति 12.1

आइए कागज को l के अनुदिश मोड़ें। हम देखते हैं कि PB ठीक PA के ऊपर पड़ती है। इस प्रकार, PA=PB।

यदि हम l पर कोई अन्य बिंदु Q लें तो क्या होगा ? यदि हम कागज को l के अनुदिश मोड़ें तो हम पुन: देखते हैं कि QB ठीक QA के ऊपर पड़ती है, अर्थात् QA=QB।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि

1. दो दिए हुए बिंदुओं की सममिति अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिंदु उन बिंदुओं से समदूरस्थ (equidistant) होता है।

अब आइए एक बिंदु R लें जो l पर स्थित नहीं हो [देखिए आकृति 12.1(ii)] और R और A तथा R और B को मिलाएँ। हम RA और RB के बारे में क्या कह सकते हैं ?

आइए RA और RB को मापें। हम क्या देखते हैं ? हमें ज्ञात होता है कि RA और RB असमान हैं। (हम इसे RA≠RB लिखते हैं)।

2. यदि हम इस प्रयोग को ऐसे अन्य बिंदुओं के साथ दोहराएँ जो कि l पर स्थित नहीं हैं, तो हम पुनः देखते हैं कि इन बिंदुओं में कोई भी बिंदु A और B से समदूरस्थ नहीं है।

इस प्रकार (1) और (2) से हम देखते हैं कि दो दिए हुए बिंदुओं की सममिति अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिंदु उन बिंदुओं से समदूरस्थ होता है तथा दो दिए हुए बिंदुओं की सममिति अक्ष पर न स्थित प्रत्येक बिंदु उन बिंदुओं से समदूरस्थ नहीं होता। दूसरे शब्दों में,

(i) यदि एक बिंदु दो दिए हुए बिंदुओं से समदूरस्थ है, तो वह उन बिंदुओं की सममिति अक्ष पर स्थित होता है और

(ii) यदि एक बिंदु दो दिए हुए बिंदुओं की सममिति अक्ष पर स्थित है, तो वह उन बिंदुओं से समदूरस्थ होता है।

(i) में हम एक ऐसे बिंदु से प्रारम्भ करते हैं जो कि दो दिए हुए बिंदुओं से समदूरस्थ है और देखते हैं कि वह उन दोनों बिंदुओं की सममिति अक्ष पर स्थित है। परन्तु (ii) में स्थिति उल्टी है। हम कहते हैं कि **(ii), (i) का विलोम (converse) है तथा (i), (ii) का विलोम है।** यहाँ (i) और उसका विलोम दोनों ही सत्य हैं। परन्तु यह आवश्यक नहीं है कि किसी कथन का विलोम सदैव ही सत्य हो।

टिप्पणी : चूँकि सममिति अक्ष l, रेखाखंड AB को समद्विभाजित करती है तथा AB पर लम्ब भी है, अतः हम कहते हैं कि l, AB का **लम्ब समद्विभाजक (perpendicular bisector** या **right bisector)** है।

12.3 बिंदु के सापेक्ष सममिति

हम **एक रेखा के सापेक्ष एक बिंदु के सममित (symmetric)** से पहले से ही परिचित हैं।

12.3.1 अब हम एक बिंदु के सापेक्ष एक बिंदु के सममित पर विचार करते हैं।

मान लीजिए O और A दो बिंदु हैं। आइए A और O को मिलाएँ और उसे B तक इस प्रकार बढ़ाएँ ताकि

$$OB = AO$$

अर्थात् रेखाखंड AB, O पर समद्विभाजित हो जाए। (देखिए आकृति 12.2) हम कहते हैं कि **O के सापेक्ष B, A**

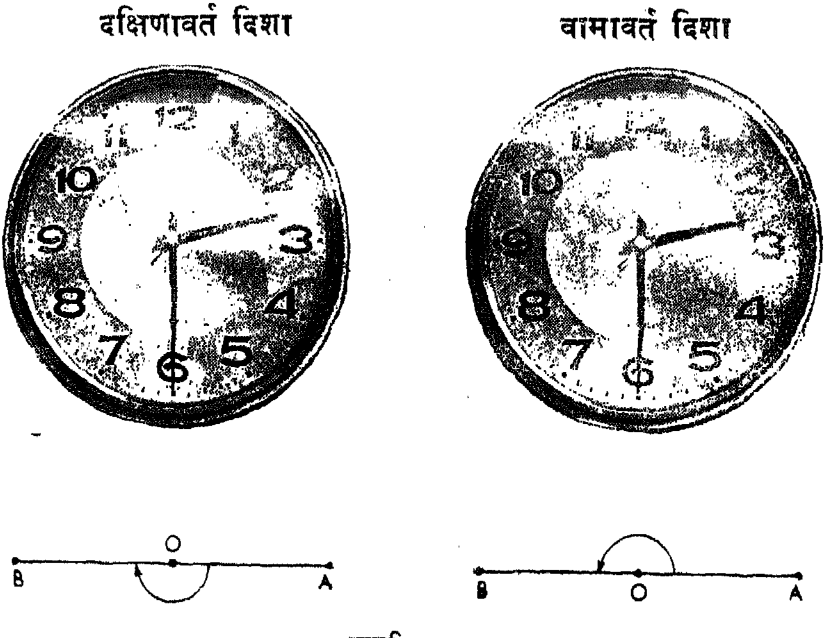


आकृति 12.2

का सममित है तथा A, B का सममित है। हम यह भी कहते हैं कि **A और B, O के सापेक्ष सममित हैं।** O बिंदुओं **A और B** का **सममिति केन्द्र (centre of symmetry)** कहलाता है।

हम देखते हैं कि कोण AOB एक ऋजु कोण(straight angle) है, अर्थात् $\angle AOB = 180°$ है। अतः यदि हम रेखाखंड OA को O के चारों ओर 180° के कोण पर घुमाएँ तो वह रेखाखंड OB के साथ संपाती (coincidence) हो जाएगा जिससे A, B के साथ संपाती हो जाता है। दूसरे शब्दों में, **रेखाखंड OA को O के चारों ओर 180° के कोण पर घुमाने से हम बिंदु A से उसका O के सापेक्ष सममित बिंदु B प्राप्त कर सकते हैं।**

टिप्पणी : यह देखा जा सकता कि उपर्युक्त घूर्णन (rotation) या तो उस दिशा [sense (direction)] में हो सकता जिसमें घड़ी की सुइयाँ घूमती हैं



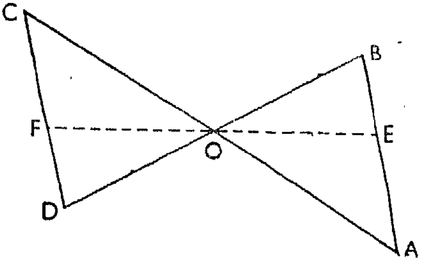
आकृति 12.3

[अर्थात् **दक्षिणावर्त (clockwise)** दिशा में] या इसकी विपरीत दिशा [अर्थात् **वामावर्त (anticlockwise)** दिशा] में हो सकता है। (देखिए आकृति 12.3)

जब घूर्णन की दिशा निर्दिष्ट नहीं की जाएगी तो हम उसे वामावर्त दिशा मान लेंगे।

12.3.2 अब हम **एक बिंदु के सापेक्ष एक रेखाखंड के सममित** का अध्ययन करते हैं।

मान लीजिए AB एक रेखाखंड है तथा O कोई बिंदु जो AB पर स्थित नहीं है। आइए O के सापेक्ष क्रमशः A और B के सममित बिंदुओं C और D की रचना करें। अंत में, आइए C और D को मिलाएँ। (देखिए आकृति 12.4)



आकृति 12.4

अब आइए AB पर कोई भी बिंदु E लें और O के सापेक्ष उसके सममित F की रचना करें। [हम सममित की रचना किस प्रकार करते हैं? हम EO को F तक इस प्रकार बढ़ाते हैं कि OF = EO हो।] हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि F, रेखाखंड CD पर स्थित है।

आइए इस प्रयोग को AB पर स्थित कुछ अन्य बिंदुओं के साथ दोहराएँ। हम देखते हैं कि इन सब बिंदुओं के सममित CD पर स्थित हैं। इस प्रकार, रेखाखंड AB के सभी बिंदुओं के सममित रेखाखंड CD पर स्थित हैं। निस्संदेह, इस कथन का **विलोम** भी सत्य है। अर्थात्, रेखाखंड CD के सभी बिंदुओं के सममित रेखाखंड AB पर स्थित हैं।

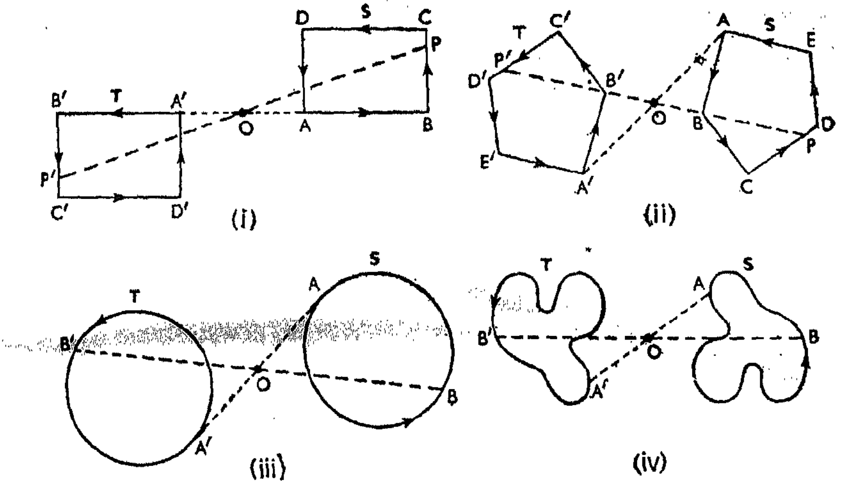
अतः हम कहते हैं कि **O के सापेक्ष रेखाखंड AB का सममित CD है तथा CD का सममित AB है**। हम यह भी कहते हैं कि **O के सापेक्ष रेखाखंड AB और CD सममित हैं। O, रेखाखंडों AB और CD का सममिति केन्द्र** कहलाता **है।**

चूँकि कोण AOC और BOD ऋजु कोण हैं, अतः हम देखते हैं कि यदि हम त्रिभुज OAB को O के चारों ओर 180° के कोण पर घुमाएँ, तो वह त्रिभुज OCD के साथ संपाती हो जाएगा जिससे OA, OC के साथ संपाती

हो जाता है तथा OB, OD के साथ संपाती हो जाता है। दूसरे शब्दों में, **$\triangle$OAB को O के चारों ओर 180° के कोण पर घुमाने से,** हम **AB से O के सापेक्ष AB का समामित CD प्राप्त कर सकते हैं।** हम देखते हैं कि AB=CD।

12.3.3 अंत में, हम **एक बिंदु के सापेक्ष एक (ज्यामितीय) आकृति के सममित** पर विचार करते हैं।

मान लीजिए S एक दी हुई आकृति* है तथा O उसके बाहर कोई बिंदु है। हम इसका O के सापेक्ष सममित कैसे प्राप्त करेंगे? **हम आकृति S के प्रत्येक बिंदु के O के सापेक्ष सममित की रचना करते हैं।** हमें एक अन्य (ज्यामितीय) आकृति, उदाहरणार्थ, T प्राप्त होती है। हम कहते हैं कि **O के सापेक्ष T; आकृति S का सममित है।** (देखिए आकृति 12.5) चूँकि T के प्रत्येक बिंदु का



आकृति 12.5

सममित S पर स्थित होता है, अत: हम कहते हैं कि **O के सापेक्ष S आकृति T का सममित है।** हम यह भी कहते हैं कि **S और T, O के सापेक्ष सममित हैं।**

---

*अभी तक हमने अंग्रेजी के बड़े अक्षरों (capital letters) का प्रयोग बिंदुओं को नामांकित करने के लिए किया है। अब हम S का प्रयोग एक आकृति को नामांकित करने के लिए कर रहे हैं।

पुन: **S को O के चारों ओर 180° के कोण पर घुमाने से** हम **S से O के सापेक्ष S का सममित T प्राप्त कर सकते हैं।** O, **आकृतियों S और T का सममिति केन्द्र** कहलाता है।

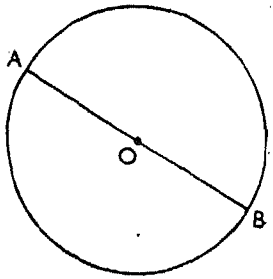
हम देखते हैं कि **सममिति बिंदुओं को मिलाने वाले सभी रेखाखंड सममिति केन्द्र पर समद्विभाजित होते हैं।**

चूँकि S और T, O के सापेक्ष सममित हैं, अत: यह स्पष्ट है कि इनमें से प्रत्येक बिंदु O के चारों ओर 180° के एक घूर्णन द्वारा दूसरे के साथ संपाती किया जा सकता है। अत: आकृतियाँ S और T **सर्वांगसम (congruent)** हैं। क्या आप देख रहे हैं कि ये आकृतियाँ **सीधे सर्वांगसम (directly congruent)** हैं ?

टिप्पणी : ज्यामितीय आकृतियों की एक बिंदु के सापेक्ष सममिति **केन्द्रीय सममिति (central symmetry)** कहलाती है।

12.4 बिंदु के सापेक्ष सममित आकृतियाँ

आइए एक वृत्त लें जिसका केन्द्र, उदाहरणार्थ, O है। मान लीजिए AOB इस वृत्त का एक व्यास है। (देखिए आकृति 12.6) आपको याद होगा कि व्यास केन्द्र पर समद्विभाजित होता है। इस प्रकार O के सापेक्ष B, A का सममित है तथा A, B का सममित है।

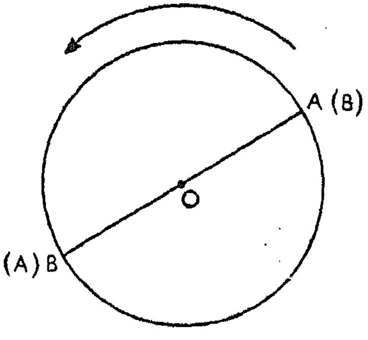


आकृति 12.6

हम देखते हैं कि वृत्त पर स्थित किसी भी बिंदु का केन्द्र के सापेक्ष सममित उस बिंदु से होकर जाने वाले व्यास का दूसरा सिरा है। इस प्रकार, किसी वृत्त पर स्थित सभी बिंदुओं के केन्द्र के सापेक्ष सममित स्वयं उस वृत्त पर ही स्थित हैं। अत: **वृत्त अपने केन्द्र के सापेक्ष स्वयं अपना सममित होता है।** हम केवल यह कहते हैं कि **वृत्त अपने केन्द्र के सापेक्ष सममित होता है।**

एक आकृति जो किसी बिंदु के सापेक्ष स्वयं अपना ही सममित होती है उस बिंदु के सापेक्ष सममित कहलाती है तथा वह बिंदु उसका **सममिति केन्द्र** कहलाता है।

यदि हम किसी आकृति को, जो एक बिंदु O के सापेक्ष सममित है, O के चारों ओर 180° के कोण पर घुमाएँ तो क्या होगा ? क्या वह मूल आकृति के साथ संपाती हो जाएगी ? हाँ ! (देखिए आकृति 12.7) हम यह भी देखते हैं कि प्रत्येक बिंदु O के सापेक्ष अपने सममित से स्थान परिवर्तन कर लेता है।



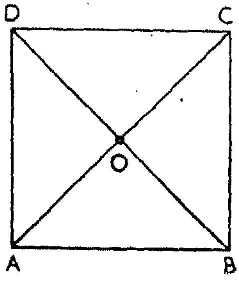
आकृति 12.7

इस प्रकार यह निर्धारित करने के लिए कि कोई आकृति किसी बिंदु O के सापेक्ष सममित है या नहीं हम उस आकृति को O के चारों ओर 180° के कोण पर घुमाते हैं। यदि वह आकृति केवल यह छोड़कर कि बिंदु O के सापेक्ष अपने सममितों (symmetrics) से स्थान परिवर्तन कर लेते हैं, मूल आकृति के साथ संपाती हो जाती है तो हम निष्कर्ष निकालते हैं कि वह आकृति O के सापेक्ष सममित है। O, तब उस आकृति का **सममिति केन्द्र** है।

हम कुछ और आकृतियों के उदाहरण दे रहे हैं जो एक बिंदु के सापेक्ष सममित हैं।

12.4.1 वर्ग

मान लीजिए ABCD एक वर्ग है तथा O उसके विकर्णों AC और BD का प्रतिच्छेद बिंदु है। (देखिए आकृति 12.8) आपको याद होगा कि वर्ग अपने विकर्णों AC तथा BD में से प्रत्येक के सापेक्ष सममित होता है। साथ ही, चूँकि रेखा AC के सापेक्ष B और D सममित बिंदुओं का एक युग्म बनाते हैं (क्यों ?), अत: AC, BD को बिंदु O पर समकोण पर समद्विभाजित करता है। इसी प्रकार BD, AC को O पर समकोण पर समद्विभाजित करता है।

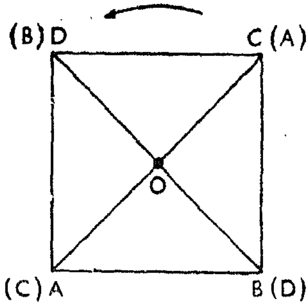


आकृति 12.8

क्या वर्ग ABCD बिंदु O के सापेक्ष सममित है ? आइए देखें।

यदि हम वर्ग को O के चारों ओर 180° के कोण पर घुमाएँ* तो क्या होगा ? हम देखते हैं कि A, O के सापेक्ष अपने सममित C से स्थान परिवर्तन कर लेता है तथा B अपने सममित D से स्थान परिवर्तन कर लेता है। (देखिए आकृति 12.9) वास्तव में वह आकृति, केवल यह छोड़कर कि प्रत्येक बिंदु O के सापेक्ष अपने सममित से स्थान परिवर्तन कर लेता है, मूल वर्ग के साथ संपाती हो जाती है।

अतः, **वर्ग ABCD अपने विकर्णों AC और BD के प्रतिच्छेद बिंदु O के सापेक्ष सममित है।**

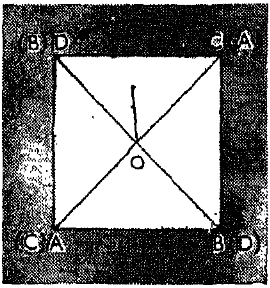


आकृति 12.9

क्या कोई अन्य बिंदु भी है जिसके सापेक्ष यह वर्ग सममित है ?

***कक्षा में क्रियाकलाप हेतु सुझाव**

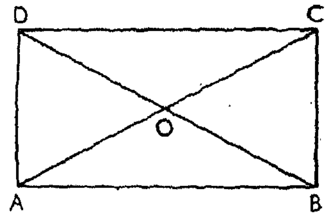
एक पतले गत्ते पर एक वर्ग ABCD काट लीजिए। उसके विकर्ण AC और BD खींचिए। उनके प्रतिच्छेद बिंदु को O से अंकित कीजिए। O से होकर जाती हुई एक ड्राइंग पिन द्वारा वर्ग को एक मेज के ऊपरी तल पर लगाइए। एक नुकीली पेंसिल या चौक (chalk) की सहायता से मेज के तल पर वर्ग की बाहरी रूप-रेखा खींचिए।



अब वर्ग को O के चारों ओर 180° के कोण पर घुमाइए। (आप किस तरह कहेंगे कि आपने वर्ग को 180° के कोण पर घुमा लिया है ?) आप क्या देखते हैं ?

12.4.2 आयत

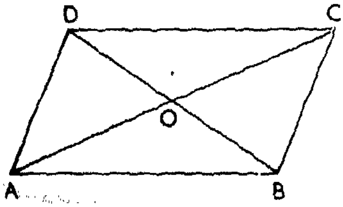
मान लीजिए ABCD एक आयत है तथा O उसके विकर्णों AC और BD का प्रतिच्छेद बिंदु है। (देखिए आकृति 12.10) पाठक को चाहिए कि वह उसी प्रकार का प्रयोग करे जैसा कि एक वर्ग की स्थिति में क्रियाकलाप हेतु सुझाया गया है और जाँच करे कि **आयत ABCD अपने विकर्णों AC और BD के प्रतिच्छेद बिंदु O के सापेक्ष सममित है।**



आकृति 12.10

12.4.3 समांतर चतुर्भुज

मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है तथा O उसके विकर्णों AC और BD का प्रतिच्छेद बिंदु है। (देखिए आकृति 12.11) पुनः पाठक को चाहिए कि वह एक प्रयोग करे और जाँच करे कि **समांतर चतुर्भुज ABCD अपने विकर्णों AC और BD के प्रतिच्छेद बिंदु O के सापेक्ष सममित है।** आपको याद होगा कि, व्यापक रूप में, **एक समांतर चतुर्भुज में कोई रैखिक सममिति नहीं होती। परन्तु इसमें केन्द्रीय सममिति अवश्य होती है।**



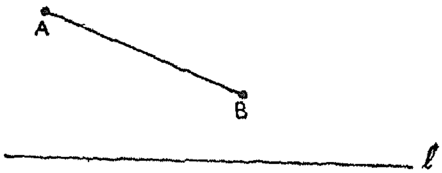
आकृति 12.11

प्रश्नावली 12.1

1. मान लीजिए l एक रेखा है तथा P कोई बिंदु जो l पर स्थित नहीं है। l के सापेक्ष P का सममित कहाँ पर स्थित है?

[हम निष्कर्ष निकालते हैं कि l **पर स्थित प्रत्येक बिंदु स्वयं का सममित होता है।** मैकमिलन कंपनी ऑफ इन्डिया, लिमिटेड द्वारा प्रकाशित माध्यमिक विद्यालयों के लिए गणित, पुस्तक 1, 1977, (कक्षा VI के लिए एक पाठ्यपुस्तक) के पृष्ठ 193 पर अनुच्छेद *18.5.1* भी देखिए।]

2. मान लीजिए l और AB दो असमांतर रेखाएँ हैं। (देखिए आकृति 12.12) l के सापेक्ष AB के सममित की रचना कीजिए और उसे CD से व्यक्त कीजिए। क्या CD, AB को प्रतिच्छेद करती है? यदि हाँ, तो प्रतिच्छेद बिंदु कहाँ स्थित है?



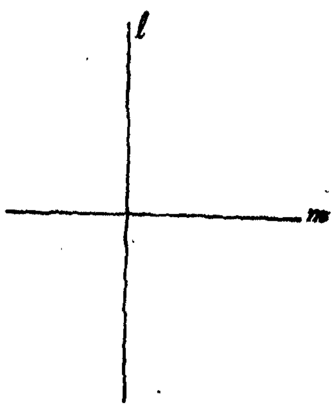
आकृति 12.12

[हम देखते हैं कि **एक दी हुई रेखा l के सापेक्ष दो सममित रेखाओं का प्रतिच्छेद बिंदु l पर स्थित होता है।**]

3. मान लीजिए l और m परस्पर दो लम्ब रेखाएँ हैं। (देखिए आकृति 12.13) l के सापेक्ष m का सममित तथा m के सापेक्ष l का सममित ज्ञात कीजिए।

[हम निष्कर्ष निकालते हैं कि **एक रेखा l का उस रेखा पर किसी लम्ब रेखा के सापेक्ष सममित स्वयं वह रेखा ही होती है।**

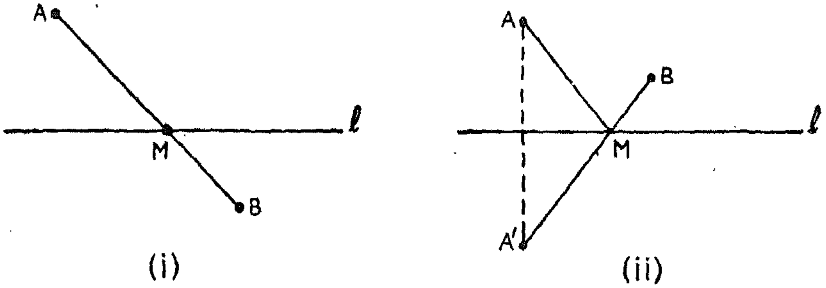
उपर्युक्त तीनों गुण **रैखिक सममिति के गुण हैं।**]



आकृति 12.13

4. l एक रेखा है तथा A और B उस पर न स्थित दो बिंदु हैं। l पर एक बिंदु M इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि AM+BM न्यूनतम हो।

[संकेत : पहले उस स्थिति की जाँच कीजिए जिसमें A और B, l के



आकृति 12.14

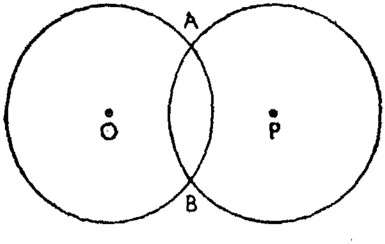
विपरीत ओर स्थित हैं। फिर उस स्थिति की जाँच कीजिए जब A और B, l के एक ही ओर स्थित हैं और l के सापेक्ष A का सममित ज्ञात कीजिए। (देखिए आकृति 12.14)]

***5.** एक सड़क (रेखा) के एक ही ओर दो गाँव (बिंदु) हैं। सड़क के किनारे एक कुआँ बनाने का निश्चय किया गया है। कुआँ किस जगह बनाया जाए ताकि

(i) प्रत्येक गाँव के लोगों को कुएँ तक आने में समान दूरी चलनी पड़े ?

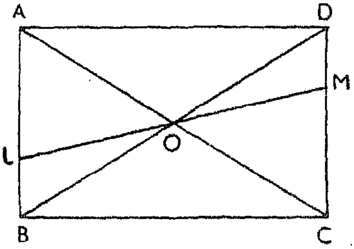
(ii) कुएँ से गाँवों की दूरियों का योग न्यूनतम हो ?

6. आकृति 12.15 में क्रमशः केन्द्र O और P वाले तथा समान त्रिज्या वाले दो वृत्त परस्पर A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। क्या AB, O और P की सममिति रेखा है ? सकारण उत्तर दीजिए।



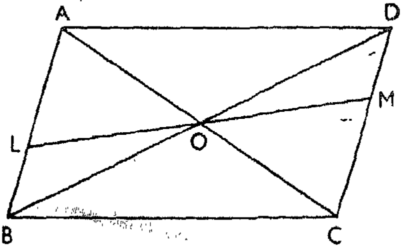
आकृति 12.15

7. मान लीजिए ABCD एक आयत है जिसके विकर्ण AC और BD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। O से होकर और सम्मुख भुजाओं से L और M पर मिलता हुआ एक रेखाखंड LM खींचिए जैसा कि आकृति 12.16 में दिखाया गया है। क्या LM, O पर समद्विभाजित हो जाता है ? सकारण उत्तर दीजिए।



आकृति 12.16

8. मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC और BD बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। O से होकर और सम्मुख भुजाओं से L और M पर मिलता हुआ एक रेखाखंड LM खींचिए जैसा कि आकृति 12.17 में दिखाया गया है। क्या LM, O पर समद्विभाजित हो जाता है ? सकारण उत्तर दीजिए।

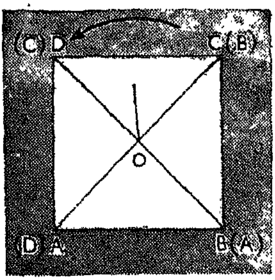


आकृति 12.17

9. एक पतले गत्ते पर एक वर्ग ABCD काट लीजिए। उसके विकर्ण AC और BD खींचिए। उनके प्रतिच्छेद बिंदु को O से व्यक्त कीजिए। (देखिए आकृति 12.18)

आपको याद होगा कि **वर्ग के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं**। इस प्रकार सभी कोण AOB, BOC, COD और DOA समकोण हैं।

O से होकर जाती हुए एक पिन द्वारा वर्ग को एक मेज के तल पर लगाइए।



आकृति 12.18

तथा एक नुकीली पेंसिल या चौक की सहायता से वर्ग की बाहरी रूप-रेखा खींचिए। **वर्ग को O के चारों ओर 90° के कोण पर घुमाइए।** आप क्या देखते हैं ?

[हम देखते हैं कि घूर्णन के बाद वर्ग मूल वर्ग के साथ केवल यह छोड़कर संपाती हो जाता है कि A, B पर ; B, C पर ; C, D पर तथा D, A पर आ जाता है। हम कहते हैं कि **वर्ग में अपने केन्द्र के सापेक्ष 90° के कोण के घूर्णन के लिए (या अधिक सरल रूप में 90° घूर्णन के लिए) घूर्णन सममिति (rotational symmetry) होती है।**]

10. जाँच कीजिए वर्ग में अपने विकर्णों के प्रतिच्छेद बिंदु के सापेक्ष 90°, 180°, 270° तथा 360° घूर्णनों* के लिए घूर्णन सममिति होती है।

[पाठक ध्यान दें कि **180° घूर्णन के लिए घूर्णन सममिति तथा केन्द्रीय सममिति एक ही समान हैं।**]

11. एक पतले गत्ते पर एक वृत्त काट लीजिए। उसका केन्द्र O अंकित कीजिए। O से होकर जाती हुई एक पिन की सहायता से वृत्त को एक मेज़ के तल पर लगाइए तथा एक नुकीली पेंसिल या चौक की सहायता से वृत्त की बाहरी रूप-रेखा खींचिए। वृत्त को O के चारों ओर घुमाइए। आप क्या देखते हैं ?

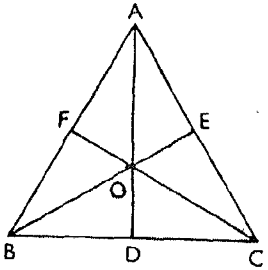
[हम देखते हैं कि **वृत्त में अपने केन्द्र के सापेक्ष किसी भी कोण के लिए घूर्णन सममिति होती है।**]

---

* मान लीजिए S कोई आकृति है और O कोई बिंदु। आइए S को O के सापेक्ष 360° के कोण पर घुमाएँ। हम क्या देखते हैं ? क्या S घूर्णन के बाद अपनी मूल स्थिति पर आ जाता है ? हाँ। इस प्रकार हम देखते हैं कि यह कहा जा सकता है कि 360° के घूर्णन के लिए प्रत्येक आकृति में प्रत्येक बिंदु के सापेक्ष घूर्णन सममिति होती है। जब किसी आकृति में केवल एक यही घूर्णन सममिति होती है तो हम यह नहीं मानते कि उस आकृति में कोई घूर्णन सममिति है।

12. आकृति 12.19 में, ABC एक समबाहु त्रिभुज है। तथा D, E और F क्रमशः उसकी भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिंदु हैं।

आपको याद होगा कि इस **समबाहु त्रिभुज ABC में रेखाओं AD, BE और CF के सापेक्ष रैखिक सममिति है।**



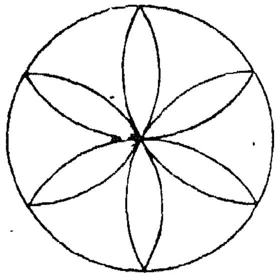
आकृति 12.19

क्या इस त्रिभुज में केन्द्रीय सममिति है? यदि ऐसा है, तो सममिति केन्द्र ज्ञात कीजिए। क्या इस त्रिभुज में कोई घूर्णन सममिति है? यदि ऐसा है तो उसका केन्द्र और घूर्णन कोण बताइए।

13. अंग्रेजी वर्णमाला के कौन-कौन से अक्षरों में घूर्णन सममिति है?

14. यहाँ एक ज्यामितीय डिज़ाइन दिया गया है जिसमें 60°, 120°, 180°, 240° और 300° के घूर्णनों के लिए घूर्णन सममिति है।

घूर्णन सममिति वाले कुछ अन्य ज्यामितीय डिज़ाइनों के उदाहरण दीजिए और घूर्णन के कोण लिखिए।



आकृति 12.20

12.5 रचनाएँ

12.5.1 एक दिए हुए रेखाखंड को समद्विभाजित करना

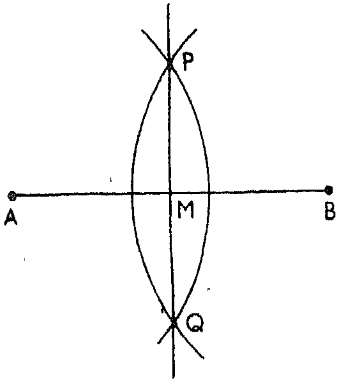
श्रृंखला **माध्यमिक विद्यालयों के लिए गणित** की पुस्तक I के अनुच्छेद 18.5.2 में हमने सीखा था कि दो दिए हुए बिंदुओं, उदाहरणार्थ, A और B

की सममिति रेखा की किस प्रकार रचना की जाती है। (देखिए आकृति 12.21)

PQ, बिंदुओं A और B की सममिति रेखा है।

आपको याद होगा कि यह सममिति रेखा बिंदुओं A और B को मिलाने वाले रेखाखंड का लम्ब समद्विभाजक होती है।

इस प्रकार PQ का AB के साथ प्रतिच्छेद बिंदु M ही वह बिंदु है जो दिए हुए रेखाखंड को समद्विभाजित करता है।



आकृति 12.21

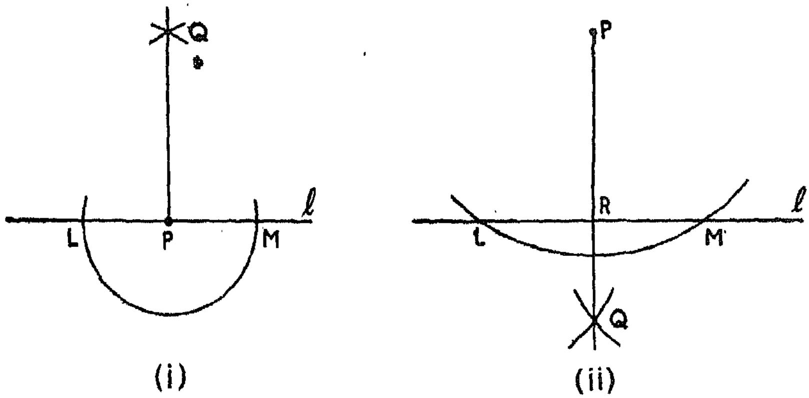
12.5.2 एक दी हुई रेखा पर एक दिए हुए बिंदु से लम्ब की रचना करना

मान लीजिए l दी हुई रेखा है तथा P दिया हुआ बिंदु। इसके अनुसार कि P, l पर स्थित है या l पर स्थित नहीं है दो स्थितियाँ सामने आती हैं। परन्तु प्रत्येक स्थिति में रचना के चरण एक जैसे ही हैं। हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : P को केन्द्र मानकर और कोई सुविधाजनक त्रिज्या लेकर हम रेखा l को L और M पर काटता हुआ एक चाप खींचते हैं।

चरण 2 : L को केन्द्र मानकर और $\frac{1}{2}$LM से अधिक त्रिज्या लेकर हम एक चाप खींचते हैं।

चरण 3 : M को केन्द्र मानकर तथा वही त्रिज्या लेकर जो चरण 2 में ली थी हम एक दूसरा चाप खींचते हैं जो चरण 2 में प्राप्त चाप को Q पर काटता



आकृति 12.22

तब, PQ ही P से l पर वाँछित लम्ब है। (देखिए आकृति 12.22)

[क्या P, L और M से समदूरस्थ है ? क्यों ? क्या Q, L और M से समदूरस्थ है ? क्यों ? हम देखते हैं कि PQ बिंदुओं L और M की सममिति रेखा है। अर्थात् P Q, LM का लम्ब समद्विभाजक है और इसके परिणामस्वरूप P से l पर लम्ब है।]

प्रश्नावली 12.2

1. 6.4 सें० मी० लम्बा एक रेखाखंड खींचिए और उसे समद्विभाजित कीजिए। दोनों भागों को मापिए।

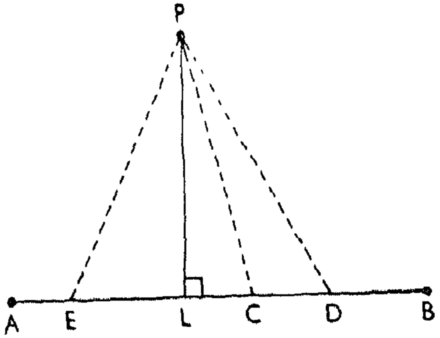
2. 8.4 सें०मी० लम्बा एक रेखाखंड खींचिए और उसे चार समान भागों में विभाजित कीजिए। वास्तविक मापन द्वारा अपनी रचना की जाँच कीजिए।

3. एक रेखाखंड AB=6 सें० मी० खींचिए। AB पर एक ऐसे बिंदु D की रचना कीजिए कि $AD=\frac{1}{4}$ AB हो। AD को मापिए।

4. एक रेखाखंड AB=8 सें० मी० खींचिए। AB पर एक ऐसे बिंदु C की

[**संकेत** : AB को M पर समद्विभाजित कीजिए। फिर, AM को N पर समद्विभाजित कीजिए। अंत में, NM को C पर समद्विभाजित कीजिए।]

5. मान लीजिए AB एक रेखा है तथा P एक बिंदु जो उस पर स्थित नहीं है। PL ⊥ AB खींचिए। AB पर कुछ अन्य बिंदु C, D,E, इत्यादि लीजिए। P और C, P और D, P और E, इत्यादि को मिलाइए। (देखिए आकृति 12.23) PL, PC, PD, PE, इत्यादि को मापिए। आप क्या देखते हैं?



आकृति 12.23

[हम देखते हैं कि **लम्ब रेखाखंड PL, P से AB पर खींचे गए अन्य सभी रेखाखंडों से छोटा है।** इसी कारण किसी बिंदु P से रेखा *l* पर खींचे गए लम्ब रेखाखंड की लम्बाई **रेखा *l* से बिंदु P की दूरी** कहलाती है।]

मुख्य संकल्पनाएँ

दो दिए हुए बिंदुओं की सममिति अक्ष पर स्थित बिंदुओं का समदूरस्थ गुण	बिंदु के सापेक्ष सममिति आकृतियाँ
बिंदु के सापेक्ष सममिति	घूर्णन सममिति
सममिति केन्द्र	एक दिए हुए रेखाखंड को समद्विभाजित करना
केन्द्रीय सममिति	किसी दिए हुए बिंदु से एक दी हुई रेखा पर लम्ब खींचना
	एक रेखा से बिंदु की दूरी

एकक XIII

त्रिभुज

इस एकक में, हम त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच संबंधों का अध्ययन करेंगे। हम त्रिभुज की माध्यिकाओं, शीर्षलम्बों और कोण समद्विभाजकों के गुणों का भी अध्ययन करेंगे।

13.1 पुनरावलोकन

आपको अपनी पिछली कक्षाओं से 'त्रिभुज' का पुनरावलोकन करना चाहिए। विशेष रूप से आपको निम्न का पुनरावलोकन करना चाहिए:

त्रिभुज की भुजाएँ, कोण और शीर्ष।

आधार और शीर्ष कोण।

त्रिभुज का परिमाप।

त्रिभुज का अभ्यंतर और बहिर्भाग।

न्यून कोण, समकोण और अधिक कोण त्रिभुज।

विषमबाहु, समद्विबाहु और समबाहु त्रिभुज।

13.2 त्रिभुज के दो महत्वपूर्ण गुण

हम त्रिभुज के निम्न महत्वपूर्ण गुणों से भी परिचित हैं:

1. त्रिभुज के कोणों का योग 180° होता है।

इस प्रकार, किसी $\triangle ABC$ में,

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$$

2. त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग उसकी तीसरी भुजा से बड़ा होता है। इस प्रकार किसी $\triangle ABC$ में,

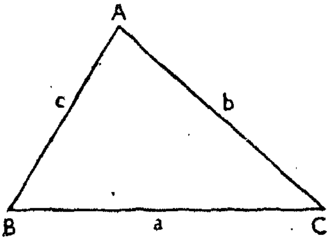
$$BC+CA>AB,$$
$$BC+AB>CA,$$
$$CA+AB>BC\ ।$$

अतः **ऐसा कोई त्रिभुज प्राप्त करना (खींचना) संभव नहीं है जिसकी दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से छोटा या उसके बराबर हो।**

बहुधा हम भुजाओं BC, **CA और AB** को जो शीर्षों A, B और C की सम्मुख भुजाएँ हैं, व्यक्त करने के लिए क्रमशः छोटे अक्षरों a, b और c का प्रयोग करते हैं। (देखिए आकृति 13.1)

उपर्युक्त गुण तब निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$a+b>c,$$
$$a+c>b,$$
$$b+c>a\ ।$$



आकृति 13.1

आपको याद होगा कि हम कोणों को या भुजाओं की लम्बाइयों को माप कर ही उपर्युक्त दोनों परिणामों पर पहुँचे थे। परन्तु, मापन बिल्कुल सही नहीं होता और मापन से जाँच को वह नहीं कहा जा सकता जिसे हम परिणाम की **उपपत्ति (proof)** कहते हैं। अतः जब तक कि हम इनको **सिद्ध करने में समर्थ** न हो जाएँ इनको स्वीकृत तथ्य ही माना जाना चाहिए।

प्रश्नावली 13.1

1. निम्न त्रिभुजों में से प्रत्येक का तीसरा कोण ज्ञात कीजिए जिनके दो कोण **निम्न हैं :**

   (i) 41°, 67° (ii) 55°, 48°
   (iii) 70°, 45° (iv) 30°, 105°
   (v) 20°, 120°

2. किसी त्रिभुज के दो कोणों का योग तीसरे कोण के बराबर है। वह त्रिभुज किस प्रकार का है?
3. एक समकोण त्रिभुज समद्विबाहु भी है। उसके कोण निर्धारित कीजिए।
4. निम्न में से प्रत्येक में त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दी हुई हैं। बताइए कौन कौन से त्रिभुज संभव हैं तथा कौन-कौन से नहीं। (सभी भुजाएँ सेंटीमीटर में मापी गई हैं।)

   (i) 3.9, 4.11, 6.8
   (ii) 2.5., 4.7, 8
   (iii) 3.4, 3.4, 5
   (iv) 5.6, 6.7, 7.8
   (v) 6.4, 2.9, 11.7
   (vi) 3.5, 2.9, 6.4

5. एक $\triangle ABC$ में, $a=5.7$ सें॰मी॰, $b=6$ सें॰ मी॰ तथा $c=4.3$ सें॰ मी॰ है। जाँच कीजिए कि :

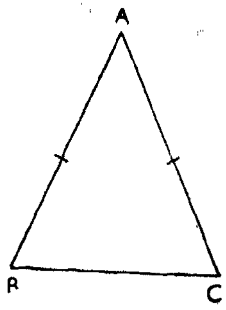
   (i) $b-c<a$ (ii) $c-b<a$
   (iii) $c-a<b$ (iv) $a-c<b$
   (v) $a-b<c$ (vi) $b-a<c$

[हम देखते हैं कि **त्रिभुज में किन्ही दो भुजाओं का अंतर तीसरी भुजा से छोटा है।**]

13.3 त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के बीच संबंध

अब हम त्रिभुजों के एक अन्य महत्वपूर्ण गुण अर्थात् उनकी भुजाओं और कोणों के बीच संबंध पर विचार करते हैं।

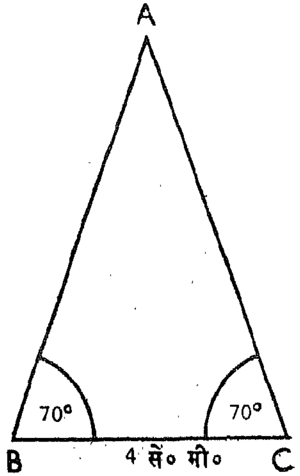
पहले आप याद कीजिए कि **एक समद्विबाहु त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।** दूसरे शब्दों में यदि ABC एक ऐसा समद्विबाहु त्रिभुज है कि $AB=AC$ हो (देखिए आकृति 13.2), तो $\angle B=\angle C$ होगा।



आकृति 13.2

अब इसके **विलोम** के बारे में हम क्या कह सकते हैं? अर्थात् यदि $\angle B=\angle C$ हो तो क्या $AB=AC$ होगा?

आइए, उदाहरणार्थ, 4 सें० मी० लम्बाई का एक रेखाखंड BC खींचें। इस पर आइए क्रमश: शीर्ष B और C वाले दो कोणों की रचना करें जिनमें से प्रत्येक 70° का हो। (देखिए आकृति 13.3) हम देखते हैं कि इन दो कोणों की भुजाएँ (BC के अतिरिक्त) परस्पर एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं। आइए इस बिंदु को A से व्यक्त करें। अब हमें एक त्रिभुज प्राप्त हो गया है जिसमें ∠B=∠C है।

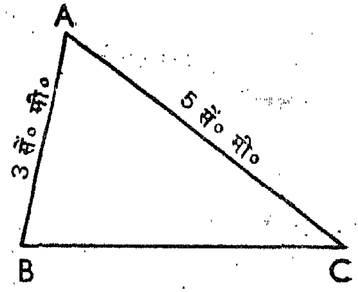


आकृति 13.3

आइए AB और AC को मापें। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि **AC=AB अर्थात् ∠B की सम्मुख भुजा, समान ∠C की सम्मुख भुजा के बराबर है।**

आइए ऐसे बहुत से त्रिभुजों की रचना कर इस प्रयोग को दोहराएँ। प्रत्येक स्थिति में हम देखते हैं कि **एक त्रिभुज में समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान हैं।**

अब आइए एक ऐसे त्रिभुज ABC को लें जिसमें भुजाएँ AB और AC असमान हैं तथा उदाहरणार्थ AC=5 सें० मी० और AB=3 सें० मी० है। (देखिए आकृति 13.4) यह स्पष्ट है कि इन भुजाओं के सम्मुख कोण भी असमान होंगे। (क्यों?) अर्थात् यह कि इन कोणों B और C में एक कोण दूसरे कोण से बड़ा होना चाहिए। आइए जाँच करें कि कौन सा कोण बड़ा है।

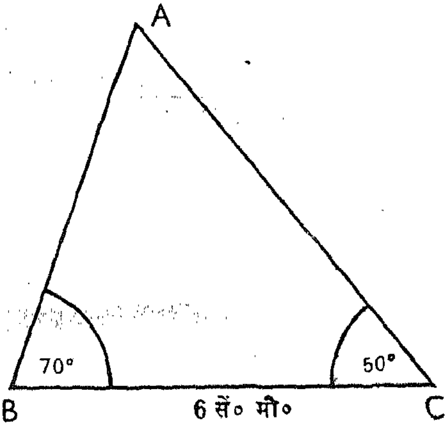


आकृति 13.4

अब कोणों B और C को मापें। हम देखते हैं कि $\angle B > \angle C$ है। दूसरे शब्दों में, **बड़ी भुजा (AC) का सम्मुख कोण ($\angle B$) बड़ा है।**

ऐसे बहुत से त्रिभुजों को लेकर और उनकी असमान भुजाओं के सम्मुख कोणों को मापकर आइए इस प्रयोग को दोहराएँ। प्रत्येक स्थिति में हम देखते हैं कि **यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ असमान हैं तो बड़ी भुजा के सामने का कोण बड़ा है।**

अब आइए जाँच करें कि क्या उपर्युक्त परिणाम का विलोम, अर्थात् यदि किसी त्रिभुज के दो कोण असमान हों तो बड़े कोण के सामने की भुजा बड़ी होती है, भी सत्य है। आइए, उदाहरणार्थ, 6 सें० मी० का एक रेखाखंड BC खींचें। फिर इस पर $70°$ के एक कोण की रचना करें जिसका शीर्ष B हो तथा एक $50°$ के कोण की रचना करें जिसका शीर्ष C हो। (देखिए आकृति 13.5)



आकृति 13.5

हम देखते हैं कि दोनों कोणों की दो भुजाएँ (BC के अतिरिक्त) एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं। आइए इस बिंदु को A से व्यक्त करें। इस प्रकार हमें एक $\triangle ABC$ प्राप्त हो गया है जिसमें $\angle B > \angle C$ है।

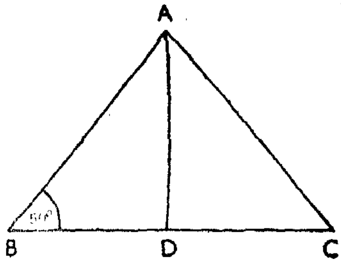
आइए AB और AC को मापें। हम देखते हैं कि $AC > AB$ है, अर्थात् **बड़े कोण ($\angle B$) के सामने की भुजा (AC) बड़ी है।**

आइए इस प्रयोग को ऐसे कुछ और त्रिभुज खींचकर दोहरायें । प्रत्येक स्थिति में हम देखते हैं कि **यदि किसी त्रिभुज में दो कोण असमान हों तो बड़े कोण के सामने की भुजा बड़ी होती है।**

प्रश्नावली 13.2

1. एक $\triangle ABC$ में $AB = AC$ और $\angle A = 72°$ है। $\angle B$ और $\angle C$ ज्ञात कीजिए।

2. आकृति 13.6 में D, BC का मध्य-बिंदु है, $AD \perp BC$ तथा $\angle B = 50°$ है। क्या $AB = AC$ है ? सकारण उत्तर दीजिए। $\angle C$ भी ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.6

[**संकेत :** दो दिए हुए बिंदुओं की सममिति अक्ष पर स्थित बिंदुओं के **समदूरस्थ गुण (equidistant property)** का प्रयोग कीजिए।]

3. समकोण त्रिभुज की कौन सी भुजा सबसे बड़ी होती है ? अधिक कोण त्रिभुज की कौन सी भुजा सबसे बड़ी होती है ?

4. एक त्रिभुज ABC में $AB = 3$ सें० मी०, $BC = 2$ सें० मी० तथा $AC = 3$ सें० मी० है। क्या यह सत्य है कि :

(i) $\angle A$ समकोण नहीं हो सकता ?

(ii) $\angle A$ अधिक कोण नहीं हो सकता ?

(iii) $\angle A$, $60°$ के बराबर नहीं हो सकता ?

(iv) $\angle A$, $60°$ से कम होना चाहिए ?

सकारण उत्तर दीजिए।

5. ABC एक त्रिभुज है। बताइए कि निम्न में से कौन कौन से कथन सत्य हैं :

(i) BC=6 सें० मी०, AB=5 सें० मी०, $\angle A > \angle C$
(ii) CA=8 सें० मी०, AB=9 सें० मी०, $\angle B > \angle C$
(iii) BC=7 सें० मी०, AC=7 सें० मी, $\angle A = \angle B$
(iv) AB=9 सें० मी०, BC=4 सें० मी०, $\angle A > \angle C$
(v) $\angle A = 75°$, $\angle C = 45°$, AB>BC
(vi) $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$, CA<AB
(vii) $\angle B = 40°$, $\angle A = 40°$, AC>BC

6. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं की लम्बाइयाँ नीचे दी गई हैं। प्रत्येक स्थिति में त्रिभुज के कोणों को परिमाण के आरोही क्रम में लिखिए।

(i) BC=5 सें० मी०, CA=6.5 सें० मी०, AB=7.9 सें० मी०
(ii) BC=10 सें०मी०, CA=6.9 सें० मी०, AB=5.4 सें० मी०
(iii) BC=3 सें० मी०, CA=4 सें० मी०, AB=5 सें० मी०
(iv) BC=3.5 सें० मी०, CA=3 सें०मी०, AB=4 सें० मी०

7. एक त्रिभुज ABC के कोण नीचे दिए गए हैं। प्रत्येक स्थिति में त्रिभुज की भुजाओं को परिमाण के अवरोही क्रम में लिखिए।

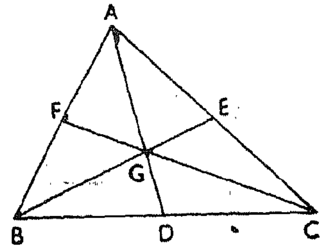
(i) $\angle A = 76°$, $\angle B = 82°$, $\angle C = 22°$
(ii) $\angle A = 35°$, $\angle B = 85°$, $\angle C = 60°$
(iii) $\angle A = 65°$, $\angle B = 55°$, $\angle C = 60°$
(iv) $\angle A = 90°$, $\angle B = 50°$, $\angle C = 40°$
(v) $\angle A = 110°$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 40°$

13.4 त्रिभुज की माध्यिकाएँ

आइए एक $\triangle ABC$ लें। मान लीजिए D,E और F क्रमश: इसकी भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिंदु हैं। (देखिए आकृति 13.7) रेखाखंड AD, BE और CF, $\triangle$ ABC की **माध्यिकाएँ (medians)** कहलाती हैं। हम कहते हैं

कि त्रिभुज की एक माध्यिका उसके एक शीर्ष को सम्मुख भुजा के मध्य-बिंदु से मिलाने वाला रेखाखंड है। ध्यान दीजिए कि त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ हैं।

अब आइए पुन: आकृति 13.7 को देखें। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि तीनों **माध्यिकाएँ AD, BE और CF एक ही बिंदु, उदाहरणार्थ, G पर मिलती हैं।**



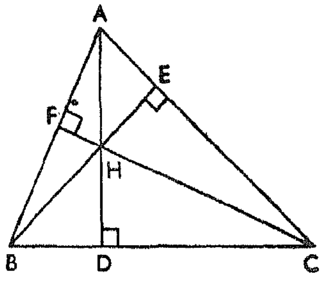
आकृति 13.7

आइए बहुत से त्रिभुज खींचकर और उनकी माध्यिकाओं की रचना करके इस प्रयोग को दोहराएँ। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में **त्रिभुज की माध्यिकाएँ एक ही बिंदु पर मिलती हैं।** हम कहते हैं कि **त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी (concurrent) होती हैं।** वह बिंदु जिस पर तीनों माध्यिकाएँ मिलती हैं त्रिभुज का **केन्द्रक (centroid)** कहलाता है। आकृति 13.7 में G, $\triangle$ ABC का केन्द्रक है।

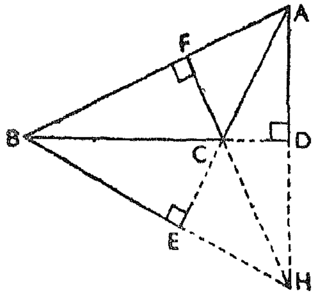
टिप्पणी : हम देखते हैं कि त्रिभुज का आकार चाहे कैसा भी हो उसकी तीनों माध्यिकाएँ उसके **अभ्यंतर** में स्थित होती हैं। साथ ही, वह बिंदु जिस पर ये मिलती हैं (अर्थात् त्रिभुज का **केन्द्रक**) भी त्रिभुज के **अभ्यंतर** में स्थित होता है।

13.5 त्रिभुज के शीर्षलम्ब

आइए एक त्रिभुज ABC लें और शीर्षों A, B और C से सम्मुख भुजाओं (या, यदि आवश्यक हो तो, बढ़ाई हुई भुजाओं) BC, CA और AB पर लम्ब डालें। मान लीजिए ये लम्ब भुजाओं BC, CA और AB से क्रमश: D, E और F पर मिलते हैं। (देखिए आकृति 13.8) रेखाखंड AD, BE और CF, त्रिभुज ABC के **शीर्षलम्ब (altitudes)** कहलाते हैं। हम कहते हैं कि **त्रिभुज का एक शीर्षलम्ब उसके एक शीर्ष से सम्मुख भुजा (या, यदि आवश्यक हो तो, बढ़ाई हुई भुजा) पर डाला गया लम्ब रेखाखंड है।** ध्यान दीजिए कि त्रिभुज के **तीन** शीर्षलम्ब हैं। बिन्दु D, E और F शीर्षलम्ब के **पाद (feet)** कहलाते हैं। साथ



(i)



(ii)

आकृति 13.8

ही, यदि हम BC को △ ABC का आधार मानें तो शीर्षलम्ब AD की लम्बाई, उसकी **ऊँचाई** कहलाती है ।

पुन: आइए आकृति 13.8 को देखें । हम क्या देखते हैं ? क्या तीनों शीर्ष-लम्ब (या बढ़ाए हुए शीर्षलम्ब) AD, BE और CF एक ही बिन्दु पर मिलते हैं ? हम देखते हैं कि **वास्तव में वे एक ही बिन्दु पर मिलते हैं ।**

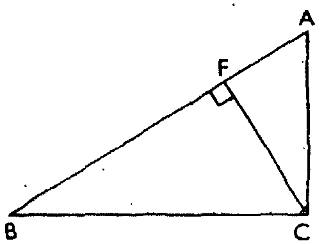
आइए इस प्रयोग को अनेक त्रिभुज लेकर और उनके शीर्षलम्बों की रचना कर दोहराएँ । हम क्या देखते हैं ? हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में **त्रिभुज के शीर्षलम्ब एक ही बिंदु पर मिलते हैं ।** हम कहते हैं कि **त्रिभुज के शीर्षलम्ब संगामी होते हैं ।** वह बिंदु जिस पर तीनों शीर्षलम्ब (या बढ़ाए हुए शीर्षलम्ब) मिलते हैं त्रिभुज का **लम्बकेन्द्र (orthocentre)** कहलाता है । आकृति 13.8 में H, △ ABC का लम्बकेन्द्र है ।

टिप्पणी : आकृति 13.8 (i) में हम देखते हैं कि ABC एक न्यून कोण त्रिभुज है । हम यह भी देखते हैं कि त्रिभुज का लम्बकेन्द्र उसके **अभ्यंतर** में स्थित है । क्या यह प्रत्येक न्यून कोण त्रिभुज के लिए सत्य है ? हाँ ! **एक न्यून कोण त्रिभुज का लम्बकेन्द्र त्रिभुज के अभ्यंतर में स्थित होता है ।**

आकृति 13.8 (ii) में हम देखते हैं कि ABC एक अधिक कोण त्रिभुज है । हम यह भी देखते हैं कि इस त्रिभुज का लम्बकेन्द्र त्रिभुज के **बहिर्भाग** में स्थित

है। क्या यह प्रत्येक अधिक कोण त्रिभुज के लिए सत्य है ? हाँ ! **एक अधिक कोण त्रिभुज का लम्बकेन्द्र त्रिभुज के बहिर्भाग में स्थित होता है।**

अब यदि त्रिभुज समकोण त्रिभुज हो तो क्या होगा ? मान लीजिए ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका ∠C समकोण है। (देखिए आकृति 13.9) हम देखते हैं कि AC, A से BC पर लम्ब है तथा BC, B से AC पर लम्ब है। C से AB पर लम्ब CF खींचिए।

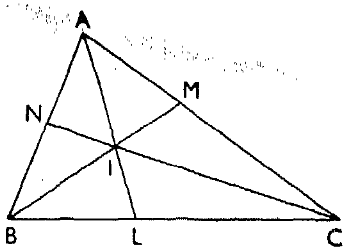


आकृति 13.9

अतः △ ABC के तीनों शीर्षलम्ब क्रमशः AC, BC और CF हैं। हम देखते हैं कि **ये शीर्षलम्ब समकोण के शीर्ष C पर मिलते हैं।** क्या यह प्रत्येक समकोण त्रिभुज के लिए सत्य है ? हाँ ! **समकोण त्रिभुज का लम्बकेन्द्र समकोण के शीर्ष पर स्थित होता है।**

13.6 त्रिभुज के कोण के समद्विभाजक

आइए एक △ABC लें और क्रमशः कोणों A, B और C के समद्विभाजकों की रचना करें। (देखिए आकृति 13.10) हम क्या देखते हैं ? क्या वे एक ही बिंदु पर मिलते हैं?हाँ, वे एक ही बिंदु पर मिलते हैं। आइए जिस बिंदु पर वे मिलते हैं उसे I से व्यक्त करें। (देखिए आकृति 13.10)



आकृति 13.10

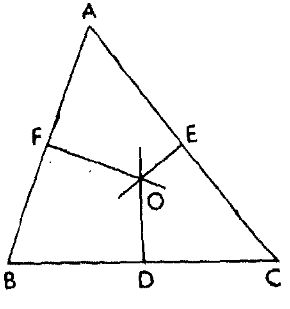
आइए अनेक त्रिभुज लेकर और उनके कोणों के समद्विभाजकों (**कोण-समद्विभाजकों**) की रचना कर इस प्रयोग को दोहराएँ। हम क्या देखते हैं ? हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में **त्रिभुज के कोण-समद्विभाजक एक ही बिंदु पर मिलते हैं।** हम कहते हैं कि **त्रिभुज के कोण-समद्विभाजक संगामी होते हैं।** वह

बिंदु जिस पर तीनों कोण-समद्विभाजक मिलते हैं त्रिभुज का **अंतः केन्द्र (incentre)** कहलाता है। आकृति 13.10 में I, △ ABC का **अंतः केन्द्र है।**

टिप्पणी : अगली कक्षाओं में हम त्रिभुज के बाह्यः कोणों पर भी विचार करेंगे, उदाहरणार्थ, CA से बढ़ाई हुई BC द्वारा बनाया गया कोण। इस स्थिति से अंतर दर्शाने के लिए हम उपर्युक्त कोणों के समद्विभाजकों को त्रिभुज के कोणों के **अंतः समद्विभाजक (internal bisectors)** कहते हैं। अतः ऊपर प्राप्त गुण पुनः इस प्रकार कहा जा सकता है, "**त्रिभुज के कोणों के अतः समद्विभाजक संगामी होते हैं।**" हम यह सरलता से देख सकते हैं कि अंतः समद्विभाजक और अंतः केन्द्र सभी त्रिभुज के अभ्यंतर में स्थित होते हैं।

13.7 त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक

आइए एक त्रिभुज ABC लें और उसकी भुजाओं BC, CA और AB के लम्ब समद्विभाजक खींचें। (देखिए आकृति 13.11) ये क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB पर उनके मध्य-बिंदुओं D, E और F से होकर जाने वाले लम्ब होंगे। हम क्या देखते हैं ? क्या ये एक ही बिंदु पर मिलते हैं ? हाँ, ये एक ही बिंदु पर मिलते हैं। आइए जिस बिंदु पर ये मिलते हैं उसे O से व्यक्त करें। O, △ ABC का **परिकेन्द्र (circum-centre)**) कहलाता है।

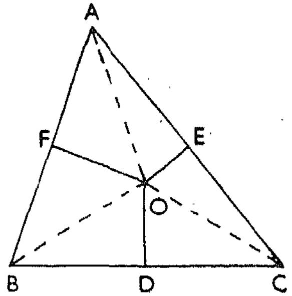


आकृति 13.11

टिप्पणी 1 : त्रिभुज की माध्यिकाओं, शीर्षलम्बों और कोण-समद्विभाजकों की स्थिति में हमने, बहुत से त्रिभुज खींचकर और यह प्रेक्षण कर कि प्रत्येक स्थिति में तीनों माध्यिकाएँ या तीनों शीर्षलम्ब या तीनों कोणों के अंतः सम-द्विभाजक संगामी हैं, अपने आपको '**संतुष्ट**' कर लिया है। परन्तु अपने आपको इस प्रकार से '**संतुष्ट**' कर लेने को कुल मिलाकर संतोषजनक नहीं कहा जा सकता, क्योंकि उपर्युक्त कथनों में से किसी भी एक की **सभी** संभव त्रिभुजों के लिए जाँच करना असंभव है।

टिप्पणी 2 : हम अपने आपको किस प्रकार संतुष्ट करें कि एक कथन **सभी** संभव त्रिभुजों के लिए सत्य है ? हम इस कथन पर विचार करते हैं कि **त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक संगामी होते हैं।**

हम मान लेते हैं कि ABC कोई त्रिभुज है। आइए BC और CA के लम्ब समद्विभाजकों की रचना करें। मान लीजिए वे O पर प्रतिच्छेद करते हैं। (देखिए आकृति 13.12)



आकृति 13.12

हम यह दिखाना चाहते हैं कि O, AB के लम्ब समद्विभाजक पर भी स्थित होगा।

आइए O और A, O और B तथा O और C को मिलाएँ।

चूँकि O, BC के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित है, अत: वह B और C से समदूरस्थ है। (क्यों ?)

इस प्रकार, OB = OC

पुन: O, CA के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित है, अत:

OC = OA

चूँकि OB = OC और OC = OA है, अत: यह निष्कर्ष निकलता है कि OB = OA

इसका अर्थ है कि O, A और B से भी समदूरस्थ है।

अब आपको याद होगा कि **दो बिंदुओं से समदूरस्थ बिंदु को उन बिंदुओं की सममिति अक्ष अर्थात् दोनों बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड के लम्ब समद्विभाजक पर अवश्य स्थित होना चाहिए।** अत: O को AB के लम्ब समद्विभाजक OF पर अवश्य स्थित होना चाहिए, अर्थात् O तीनों लम्ब समद्विभाजकों पर स्थित है। दूसरे शब्दों में, त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक एक ही बिंदु पर मिलते हैं।

उपर्युक्त तर्क प्रत्येक त्रिभुज के लिए मान्य है और इसलिए हम यह निष्कर्ष

निकाल सकते हैं कि **एक त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक संगामी होते हैं।** और अब इस गुण की प्रत्येक अलग-अलग स्थिति में जाँच करने की कोई आवश्यकता नहीं है। जाँच करने की विधि की तुलना में निष्कर्ष निकालने के लिए यह एक बहुत संतोषजनक विधि है, क्योंकि अलग-अलग स्थितियों में किसी गुण की कितनी भी जाँच की जाए उससे उस गुण की सत्यता पूर्णतया निश्चित नहीं होती।

उपर्युक्त निष्कर्ष निकालने में जो प्रक्रिया प्रयोग की गई है वह **'उपपत्ति' (proof)** कहलाती है और हम कहते हैं कि वह निष्कर्ष अथवा गुण **'सिद्ध' (prove)** कर दिया गया है। व्यापक रूप में, एक **'उपपत्ति'** की प्रक्रिया में कुछ दिए हुए तथ्यों अथवा राशियों (उदाहरणार्थ, $\triangle ABC$ और उसकी भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक) से प्रारम्भ करना, अन्य ज्ञात निष्कर्षों तथा न्यायसंगत तर्कों के नियमों (उदाहरणार्थ, एक रेखाखंड के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित बिंदुओं का समदूरस्थ गुण और यह तथ्य कि यदि $a=b$ और $b=c$, तो $a=c$) का प्रयोग करना तथा नए निष्कर्ष [उदाहरणार्थ, लम्ब समद्विभाजकों की संगामिता (concurrence)] निकालना सम्मिलित होता है।

'उपपत्ति' की उपर्युक्त विधि ईसा से अनेक शताब्दियों पहले यूनानियों द्वारा विकसित की गई थी। प्रसिद्ध यूनानी गणितज्ञ **यूक्लिड (लगभग 300 ई० पू०)** के समय तक इस विधि को परिपूर्ण कर लिया गया। यूक्लिड ने अपने समय तक ज्ञात सम्पूर्ण ज्यामितीय ज्ञान को **दी ऐलीमेन्टस् (The Elements)** नामक तेरह ग्रंथों में एकत्रित किया। उन्होंने अपने सभी निष्कर्षों की **उपपत्ति**, ज्यामिति की आधारभूत संकल्पनाओं से प्रारम्भ करते हुए और कुछ ऐसे **नियमों** अथवा **अभिगृहीतों (postulates)** का प्रयोग करते हुए जो उन्हें स्पष्टतया: सत्य प्रतीत होते थे, देकर विषय का तर्कसंगत विकास किया।

टिप्पणी 3 : हमने उपर्युक्त तर्क इसलिए दिए हैं कि पाठक को **'उपपत्ति'** की संकल्पना के विषय में कुछ ज्ञान हो जाए तथा यह ज्ञात हो जाए कि उपपत्ति की आवश्यकता क्यों पड़ती है। परन्तु हम इस प्रक्रिया का क्रमबद्ध रूप से प्रयोग नहीं करेंगे। कहीं कहीं हम अपने निष्कर्षों के पक्ष में कुछ तर्क अवश्य दे सकते हैं।

टिप्पणी 4 : त्रिभुज का परिवृत्त

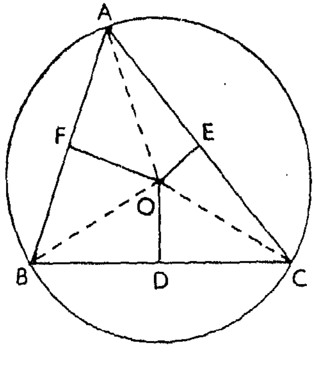
मान लीजिए ABC एक त्रिभुज है तथा O वह बिंदु है जहाँ उसकी क्रमशः

तीनों भुजाओं BC, CA और AB के लम्ब समद्विभाजक OD, OE और OF मिलते हैं।

आपको याद होगा कि

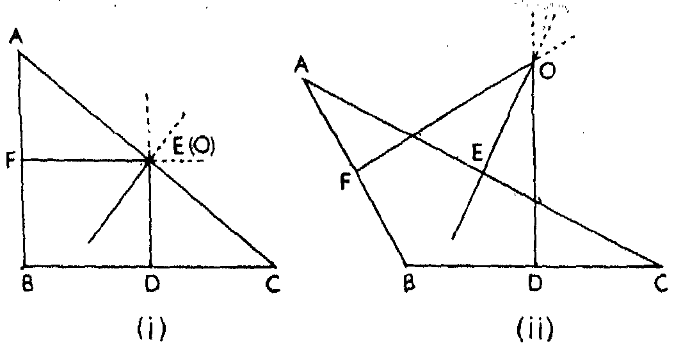
OA=OB=OC

अतः यदि हम O को केन्द्र मानकर तथा OA (या OB या OC) त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचें तो वह शीर्षों A, B और C से होकर जाएगा। (देखिए आकृति 13.13) यह वृत्त त्रिभुज का **परिगत वृत्त (circumscribed circle)** अथवा संक्षेप में **परिवृत्त (circumcircle)** कहलाता है। उसकी त्रिज्या त्रिभुज की **परित्रिज्या (circumradius)** कहलाती है तथा O त्रिभुज का **परिकेन्द्र** कहलाता है।



आकृति 13.13

टिप्पणी 5 : आइए आकृति 13.11 का पुनः अवलोकन करें। हम देखते हैं कि $\triangle ABC$ एक न्यून कोण त्रिभुज है। हम यह भी देखते हैं कि $\triangle ABC$ का परिकेन्द्र त्रिभुज के अभ्यंतर में स्थित है। क्या यह प्रत्येक न्यून कोण त्रिभुज के लिए सत्य है? हाँ! **एक न्यून कोण त्रिभुज का परिकेन्द्र उसके अभ्यंतर में स्थित होता है।**



आकृति 13.14

अब यदि त्रिभुज समकोण त्रिभुज अथवा अधिक कोण त्रिभुज हो तो क्या होगा ? पाठक को चाहिए कि वह जाँच करे कि :

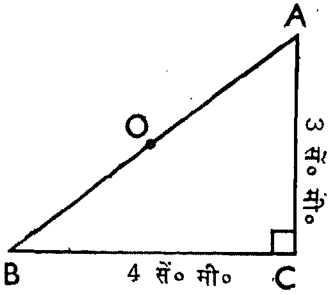
(i) **एक समकोण त्रिभुज का परिकेन्द्र उसके कर्ण पर स्थित होता है और कर्ण का मध्य-बिंदु होता है।** [देखिए आकृति 13.14(i)]

(ii) **एक अधिक कोण त्रिभुज का परिकेन्द्र त्रिभुज के बहिर्भाग में स्थित होता है।** [देखिए आकृति 13.14(ii)]

प्रश्नावली 13.3

1. एक त्रिभुज ABC खींचिए। उसकी माध्यिकाओं AD और BE की रचना कीजिए और उनके प्रतिच्छेद बिंदु को G से व्यक्त कीजिए। C और G को मिलाइए तथा आगे बढ़ाइए ताकि वह भुजा AB से F पर मिले। जाँच कीजिए कि F, AB का मध्य-बिंदु है।
2. एक त्रिभुज ABC खींचिए। उसकी माध्यिकाओं AD, BE और CF की रचना कीजिए और उनके प्रतिच्छेद बिंदु को G से व्यक्त कीजिए। AG और GD को मापिए। जाँच कीजिए कि AG=2 (GD) है। BG और GE तथा CG और GF को मापिए। जाँच कीजिए कि BG= 2(GE) तथा CG=2(GF) है।
3. एक रेखाखंड BC=4 सें० मी० की रचना कीजिए। C से होकर BC पर एक लम्ब की रचना कीजिए और उसमें से CA=3 सें० मी० काट लीजिए। B और A को मिलाइए। आपको एक समकोण त्रिभुज प्राप्त होता है जिसका समकोण C पर है। (देखिए आकृति 13.15)

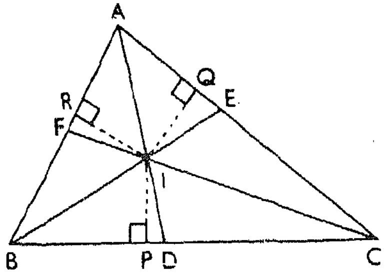
   BC, CA और AB के लम्ब समद्विभाजक खींचिए। क्या ये कर्ण AB के मध्य-बिंदु O पर मिलते हैं ? क्या O, शीर्षों A, B और C से समदूरस्थ है ? क्या AB=2 (OC) है ?



आकृति 13.15

4. एक समबाहु त्रिभुज खींचिए। उसकी माध्यिकाओं की रचना कीजिए। क्या तीनों माध्यिकाएँ बराबर हैं ?

5. एक त्रिभुज ABC खींचिए और उसके कोण-समद्विभाजकों AD, BE और CF की रचना कीजिए। ये जिस बिंदु पर मिलते हैं उसे I से व्यक्त कीजिए। (देखिए आकृति 13.16) I से भुजाओं BC, CA और AB पर क्रमशः IP, IQ और IR लम्ब खींचिए। IP, IQ और IR को मापिए। क्या ये बराबर हैं?



आकृति 13.16

6. एक समबाहु त्रिभुज ABC खींचिए और उसकी माध्यिका, उदाहरणार्थ, AD की रचना कीजिए। जाँच कीजिए कि AD, $\triangle ABC$ का एक कोण-समद्विभाजक भी है। क्या AD, $\triangle ABC$ का एक शीर्षलम्ब है? क्या AD, $\triangle ABC$ की एक भुजा का लम्ब समद्विभाजक है?

7. रिक्त स्थानों को भरिए :

एक त्रिभुज में,

(i) वह बिंदु जिस पर तीनों माध्यिकाएँ मिलती हैं,..........कहलाता है।

(ii) वह बिंदु जिस पर तीनों शीर्षलम्ब मिलते हैं,..........कहलाता है।

(iii) वह बिंदु जिस पर तीनों कोण-समद्विभाजक मिलते हैं,.......... कहलाता है।

(iv) वह बिंदु जिस पर तीनों भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक मिलते हैं,.......... कहलाता है।

8. एक न्यून (या अधिक) कोण त्रिभुज ABC लीजिए। उसके शीर्षलम्बों की रचना कीजिए और उसका लम्बकेन्द्र, उदाहरणार्थ, H निर्धारित कीजिए। जाँच कीजिए कि :

(i) A, $\triangle HBC$ का लम्बकेन्द्र है।

(ii) B, $\triangle HCA$ का लम्बकेन्द्र है।

(iii) C, $\triangle HAB$ का लम्बकेन्द्र है।

मुख्य संकल्पनाएँ

त्रिभुज के कोणों का योग		माध्यिकाएँ
त्रिभुज की किन्ही दो भुजाओं का योग		शीर्षलम्ब
	त्रिभुज की/के	कोण समद्विभाजक
त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोण		भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक
त्रिभुज के समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ		केन्द्रक
त्रिभुज में बड़ी भुजा का सम्मुख कोण		लम्बकेन्द्र
		अंत: केन्द्र
त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजा		परिकेन्द्र
		परिवृत्त

एकक XIV

त्रिभुजों की रचना और सर्वांगसमता

आपको याद होगा कि एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ और तीन कोण होते हैं। ये त्रिभुज के छः अवयव (elements) कहलाते हैं। इस एकक में हम सीखेंगे कि एक त्रिभुज की रचना किस प्रकार की जाती है जबकि उसके तीन अवयव दिए हुए हों जिनमें से कम से कम एक एक भुजा हो। हम त्रिभुजों की सर्वांगसमता (congruence) का भी अध्ययन करेंगे।

14.1 भूमिका

हम सर्वांगसम (congruent) आकृतियों से पहले से ही परिचित हैं। आपको याद होगा कि **दो समतल आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं यदि, उन्हें गत्ते के टुकड़े मानते हुए, एक को उठा कर दूसरे पर इस प्रकार रखा जा सके कि वह दूसरे को पूर्णतया ढक ले अर्थात् दूसरे के साथ संपाती हो जाए।** साथ ही, दो सर्वांगसम आकृतियाँ सभी प्रकार से समान होती हैं। विशिष्ट रूप में हम कहते हैं कि दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि, उन्हें गत्ते के टुकड़े मानते हुए, एक को उठाकर दूसरे पर इस प्रकार रखा जा सके कि वह दूसरे के साथ संपाती हो जाए। पुनः दो सर्वांगसम त्रिभुज सभी प्रकार से समान होते हैं। दूसरे शब्दों में, दो सर्वांगसम त्रिभुजों के सभी छः अवयव (तीन भुजाएँ और तीन कोण) समान होते हैं।

अब हम कुछ त्रिभुजों की रचना करना सीखेंगे और वे प्रतिबन्ध प्राप्त करेंगे जिनके अंतर्गत दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

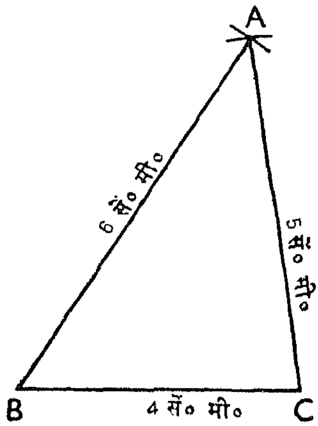
14.2 त्रिभुज की रचना करना जबकि उसकी तीनों भुजाएँ दी हुई हैं

मान लीजिए दी हुई भुजाओं की लम्बाइयाँ, उदाहरणार्थ, क्रमशः 4 सें० मी०, 5 सें० मी० और 6 सें० मी० हैं। आपको याद होगा कि एक त्रिभुज की रचना करने के चरण, जबकि उसकी तीनों भुजाएँ दी हुई हों, निम्न हैं :

चरण 1 : हम एक रेखाखंड, उदाहरणार्थ, BC=4 सें० मी० की रचना करते हैं। (देखिए आकृति 14.1)

चरण 2 : B को केन्द्र मानकर और 6 सें० मी० की त्रिज्या लेकर हम एक चाप खींचते हैं।

चरण 3 : C को केन्द्र मानकर और 5 सें० मी० की त्रिज्या लेकर हम एक अन्य चाप खींचते हैं जो कि पहले चाप को A पर काटता है।



आकृति 14.1

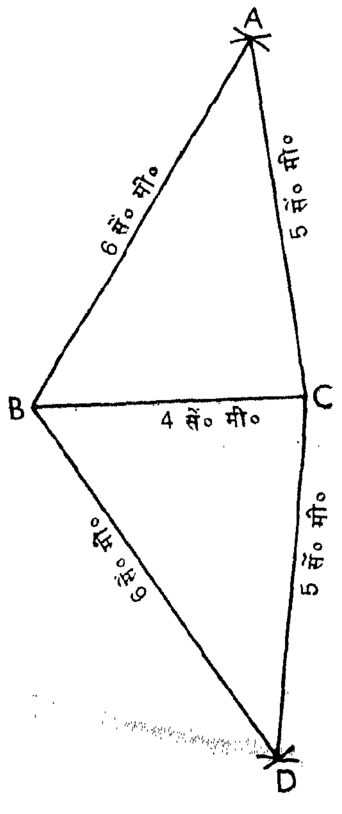
चरण 4 : हम A और B तथा A और C को मिलाते हैं।

तब, ABC वाँछित त्रिभुज है जिसकी भुजाएँ BC, CA और AB क्रमशः 4 सें० मी०, 5 सें० मी० और 6 सें० मी० लम्बाइयों की हैं।

14.3 दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता जबकि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे की तीनों भुजाओं के समान हों

हमने ऊपर देखा कि उस त्रिभुज की रचना किस प्रकार की जाती है जिसकी तीनों भुजाएँ दी हुई हों। हम अपने आप से एक प्रश्न पूछते हैं। **ऐसे कितने त्रिभुजों की रचना की जा सकती है ?**

यह सरलता से देखा जा सकता है कि ऐसे कम से कम दो त्रिभुज अवश्य हैं। जब हम B और C को केन्द्र मानकर और क्रमशः 6 सें० मी० और 5 सें० मी० त्रिज्याएँ लेकर चाप खींचते हैं तो चाप केवल A पर ही नहीं काटते



आकृति 14.2

अपितु बिन्दु D पर भी काटते हैं जैसा कि आकृति 14.2 में दिखाया गया है। △ DBC की भुजाएँ भी 4 सें० मी०, 5 सें० मी० और 6 सें० मी० हैं।

क्या इन भुजाओं वाले कुछ और भी त्रिभुज हैं ? हम देखते हैं कि हम BC को जिस स्थिति में चाहें ले सकते हैं। BC की प्रत्येक भिन्न स्थिति के लिए हमें वाँछित तीनों भुजाओं वाला एक त्रिभुज प्राप्त होता है। उदाहरणार्थ, यदि हम BC को EF को स्थिति में लें और विभिन्न चरणों में रचना करें तो हमें एक अन्य त्रिभुज DEF प्राप्त होता है जिसकी भुजाएँ 4 सें० मी०,5 सें० मी० और 6 सें० मी० हैं। (देखिए आकृति 14.3)

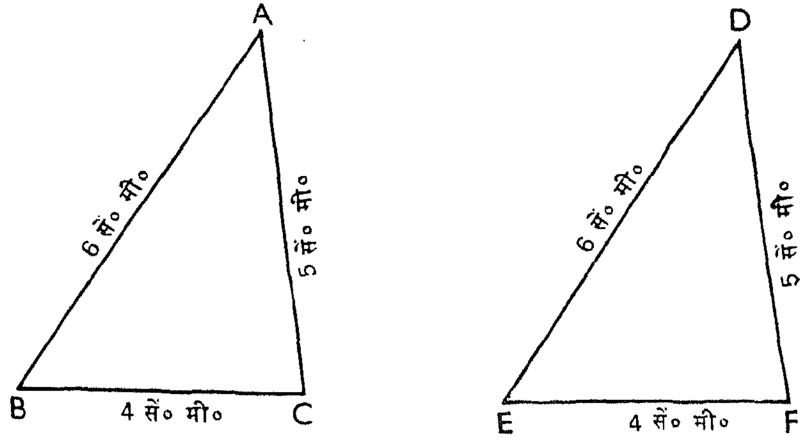
इस प्रकार यह स्पष्ट है कि **हम ऐसे चाहे जितने त्रिभुजों की रचना* कर सकते हैं जिनकी भुजाएँ दी हुई लम्बाइयों की हों।**

अब हम अपने आप से एक अन्य बहुत ही स्वाभाविक प्रश्न पूछते हैं। **इन सब त्रिभुजों के आकार (shape) और साइज़ (size) कैसे होंगे ?**

आइए निम्न प्रयोग को करें :

हम एक पतले गत्ते पर दो त्रिभुज, उदाहरणार्थ, ABC और DEF खींचते हैं ताकि BC=EF=4 सें० मी०, CA=FD=5 सें० मी० और AB=DE =6 सें० मी० हो। (देखिए आकृति 14.3) इन्हें काट लीजिए और △ DEF

*निस्संदेह, जबकि किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा हो।



आकृति 14.3

को △ ABC पर इस प्रकार रखिए कि E, B पर पड़े, और EF, BC के अनुदिश पड़े। हम क्या देखते हैं ? हम देखते हैं कि △ DEF, △ ABC के साथ **संपाती** हो जाता है। दूसरे शब्दों में, **दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।**

आइए दी हुई तीन भुजाओं वाले त्रिभुजों के अनेक युग्मों की रचना कर इस प्रयोग को दोहराएँ। हम क्या देखते हैं ? हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में दोनों त्रिभुज **सर्वांगसम** हैं। हम कहते हैं कि **यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमशः दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के समान हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। अर्थात्** यह कि **यदि दो त्रिभुजों ABC और DEF में BC=EF, CA=FD और AB=DE हो तो △ABC, △DEF के सर्वांगसम है।** हम इसे △ABC≅△DEF (जिसे △ABC सर्वांगसम है △DEF पढ़ा जाता है) लिखते हैं।

क्या आप देखते हैं कि त्रिभुजों ABC और DEF में ∠A=∠D, ∠B=∠E तथा ∠C=∠**F** है ? हम कहते हैं कि **शीर्ष A**,**शीर्ष D के तदनुरूपी है**, शीर्ष B शीर्ष E **के तदनुरूपी है** तथा शीर्ष C,शीर्ष F के **तदनुरूपी है।** साथ ही, AB और DE, BC और EF, CA और FD, ∠A और ∠D, ∠**B** और∠E तथा ∠C और∠F दोनों सर्वांगसम त्रिभुजों के **तदनुरूपी भाग (corresponding parts)** कहलाते हैं।

चूँकि एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ क्रमशः दूसरे त्रिभुज की तीन भुजाओं के समान हैं, अतः हम उपर्युक्त गुण को **भुजा-भुजा-भुजा (side-side-side)** या संक्षेप में **SSS सर्वांगसमता नियम** कहते हैं।

टिप्पणी : हम देख चुके हैं कि **दी हुई भुजाओं वाले सभी त्रिभुज सर्वांगसम हैं अर्थात् उनके एक ही आकार तथा एक ही साइज़ हैं।** अतः हम कहते हैं कि **यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ दी हुई हों तो उसके आकार और साइज़ पूर्णतया निर्धारित हो जाते हैं।**

प्रश्नावली 14.1

1. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जबकि दिया है कि

   (i) BC=5.3 सें० मी०, CA=5 सें० मी०, AB=4 सें० मी०

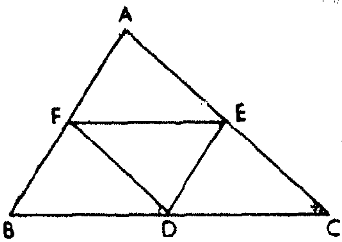
   (ii) BC=4 सें० मी०, CA=AB=5.7 सें० मी०

   (iii) BC=CA=AB=5 सें० मी०

   (iv) BC=3 सें० मी०, CA=4 सें० मी०, AB=5 सें० मी०

   (i)—(iii) में बताइए कि कौनसा त्रिभुज विषमबाहु है, कौन सा समद्विबाहु है तथा कौन सा समबाहु। (iv) में ∠C को मापिए। क्या यह एक समकोण है ?

2. एक पतले गत्ते पर एक त्रिभुज खींचिए। BC, CA और AB को क्रमशः D, E और F पर समद्विभाजित कीजिए। (देखिए आकृति 14.4) चार छोटे त्रिभुज प्राप्त करने के लिए उसे EF, FD और DE के अनुदिश काटिए। जाँच कीजिए कि ये चारों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। क्या अब आप देख सकते हैं कि ∠AFE=∠FBD, ∠AEF=∠ECD तथा EF ∥ BC है। तथा यह भी कि $EF=\frac{1}{2}BC$ है।



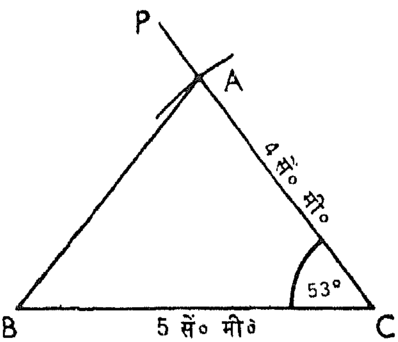
आकृति 14.4

14.4 त्रिभुज की रचना करना जबकि उसकी दो भुजाएँ और बीच का कोण दिया हुआ है

मान लीजिए दी हुई दो भुजाएँ, उदाहरणार्थ, 5 सें० मी० और 4 सें० मी० हैं और उनके बीच का कोण 53° है। हम वाँछित त्रिभुज की रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : हम एक रेखा-खंड, उदाहरणार्थ, BC=5 सें० मी० की रचना करते हैं।

चरण 2 : C पर हम ∠BCP=53° बनाते हैं। (देखिए आकृति 14.5)



आकृति 14.5

चरण 3 : ∠BCP की भुजा CP से हम CA=4 सें० मी० काट लेते हैं।

चरण 4 : हम A और B को मिलाते हैं।

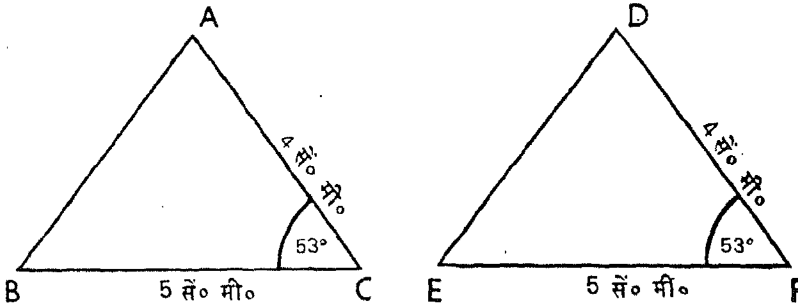
तब ABC ही वाँछित त्रिभुज है जिसकी भुजाएँ BC और CA क्रमशः 5 सें० मी० और 4 सें० मी० हैं तथा बीच का कोण BCA, 53° है।

अगले अनुच्छेद में हम ऐसे त्रिभुजों की **सर्वांगसमता** के प्रश्न को ले रहे हैं।

14.5 दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता जबकि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और बीच का कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और बीच के कोण के समान हैं

हम यह पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ रहे हैं कि वह स्वयं को संतुष्ट करे कि दी हुई दो भुजाओं और दिए हुए बीच के कोण वाले त्रिभुजों की संख्या चाहें जितनी हो सकती है।

आइए एक पतले गत्ते पर दो त्रिभुजों ABC और DEF की रचना करें ताकि BC=EF=5 सें० मी०, CA=FD=4 सें० मी० तथा ∠BCA=∠EFD=53° हो। (देखिए आकृति 14.6) पाठक को चाहिए कि वह एक उसी प्रकार का प्रयोग करे जैसा कि अनुच्छेद 14.3 में किया था और जाँच करे कि △ABC≅△DEF है। अतः हम कहते हैं कि **दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और बीच का कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की**



आकृति 14.6

दो भुजाओं और बीच के कोण के समान हों। अर्थात् यह कि **यदि दो त्रिभुजों ABC और DEF में BC=EF, CA=FD तथा ∠BCA=∠EFD हो, तो △ABC≅△DEF होता है।**

चूँकि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और बीच का कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और बीच के कोण के समान हैं, अतः हम उपर्युक्त गुण को **भुजा-कोण भुजा (side-angle-side)** या संक्षेप में **SAS सर्वांगसमता नियम** कहते हैं।

टिप्पणी 1 : हमने दी हुई भुजाओं BC और CA तथा बीच के कोण C के लिए SAS नियम की जाँच की है। परन्तु यह स्पष्ट है कि यह नियम **किन्ही** भी दो भुजाओं और बीच के कोण के लिए सत्य है।

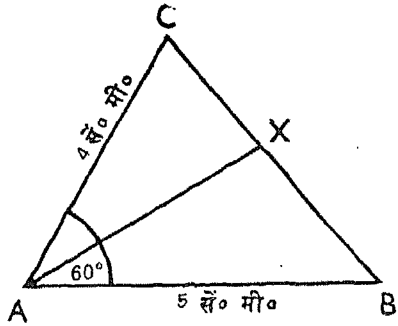
टिप्पणी 2 : SSS वाली स्थिति की ही तरह, हम देखते हैं कि **यदि किसी त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ और बीच का कोण** दिया हुआ हो तो उसके आकार **और साइज पूर्णतया निर्धारित हो जाते हैं।**

प्रश्नावली 14.2

1. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जबकि दिया हुआ है कि
   (i) AB=4.6 सें० मी०, BC=3.7 सें० मी०, ∠B=60°
   (ii) BC=5.9 सें० मी०, CA=4.8 सें० मी०, ∠C=45°
   (iii) CA=AB=5 सें० मी०, ∠A=65°

2. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी समान भुजाओं में से प्रत्येक 5 सें० मी० लम्बाई की हो।

3. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें AB=5 सें० मी०, AC=4 सें० मी० और $\angle A=60°$ है। $\angle A$ का समद्विभाजक खींचिए और मान लीजिए कि यह भुजा BC से X पर मिलता है। BX और XC को मापिए और जाँच कीजिए कि BX : XC=5 : 4 है। (देखिए आकृति 14.7)



आकृति 14.7

14.6 त्रिभुज की रचना करना जबकि उसके दो कोण और बीच की भुजा दिए हुए हों

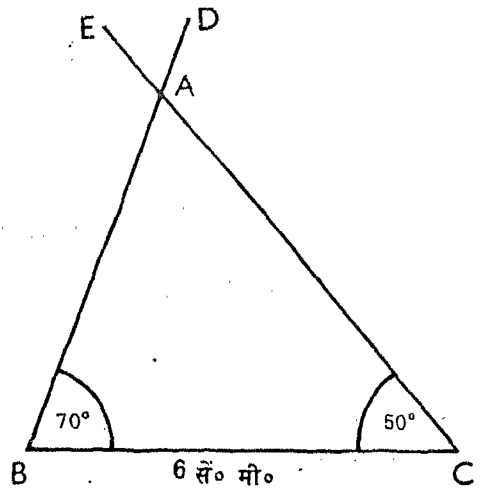
मान लीजिए त्रिभुज के दिए हुए दो कोण 70° और 50° हैं तथा इन कोणों के बीच की भुजा 6 सें० मी० है।

हम वाँछित त्रिभुज की रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : हम एक रेखाखंड, उदाहरणार्थ, BC=6 सें० मी० की रचना करते हैं।

चरण 2 : B पर हम $\angle CBD=70°$ की रचना करते हैं।

चरण 3 : C पर हम $\angle BCE=50°$ की रचना करते हैं ताकि



आकृति 14.8

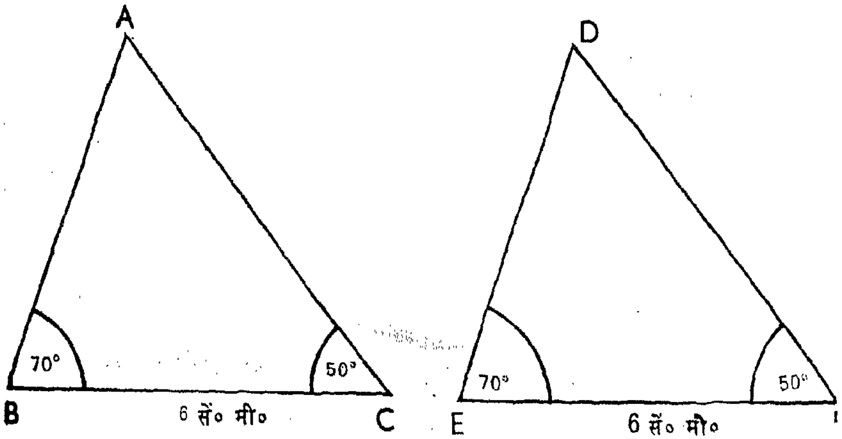
CE, BD को A पर प्रतिच्छेद करे। (देखिए आकृति 14.8)

तब ABC ही वाँछित त्रिभुज है जिसके कोण B और C क्रमशः 70° और 50° हैं तथा बीच की भुजा BC, 6 सें० मी० है।

अगले अनुच्छेद में हम ऐसे त्रिभुजों की **सर्वांगसमता** पर विचार करेंगे।

14.7 दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता जबकि एक त्रिभुज के दो कोण और बीच की भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और बीच की भुजा के समान हों

आइए एक पतले गत्ते पर दो त्रिभुजों ABC और DEF की रचना करें ताकि $\angle B = \angle E = 70°$, $\angle C = \angle F = 50°$ और BC=EF=6 सें० मी० हो। (देखिए आकृति 14.9)



आकृति 14.9

हम यह पाठक के लिए छोड़ रहे हैं कि वह जाँच करे कि $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ है।

अतः हम कहते हैं कि **दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के दो कोण और बीच की भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और बीच की भुजा के समान हों।** अर्थात् यह **कि यदि दो त्रिभुजों ABC और DEF में $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ तथा BC=EF हो, तो $\triangle ABC \cong \triangle DEF$** होता है।

चूँकि एक त्रिभुज के दो कोण और बीच की भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और बीच की भुजा के समान हैं, अतः हम उपर्युक्त गुण को **कोण-भुजा-कोण** (angle-side-angle) या संक्षेप में **ASA सर्वांगसमता नियम** कहते हैं।

टिप्पणी : SSS और SAS स्थितियों की ही तरह हम देखते हैं कि **यदि किसी त्रिभुज के दो कोण और बीच की भुजा दिए हुए हों तो उस त्रिभुज के आकार और साइज़ पूर्णतया निर्धारित हो जाते हैं।**

प्रश्नावली 14.3

1. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जबकि दिया है कि :

(i) BC=3.7 सें० मी०, $\angle B=60°$, $\angle C=75°$

(ii) CA=4.9 सें० मी०, $\angle C=53°$, $\angle A=67°$

(iii) AB=5.6 सें० मी०, $\angle A=100°$, $\angle B=30°$

2. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC=5 सें० मी०, $\angle A=30°$ तथा $\angle B=65°$ है।

3. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका कर्ण 6 सें० मी० और एक न्यून कोण 60° का हो। दूसरे न्यून कोण को मापिए। जाँच कीजिए कि दूसरे न्यून कोण की सम्मुख भुजा 3 सें० मी० है।

4. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें आधार BC=5 सें० मी० तथा शीर्ष कोण A=45° है।

14.8 समकोण त्रिभुज की रचना करना जबकि उसका कर्ण और एक भुजा दिए हुए हों

मान लीजिए दी हुई भुजा 4 सें० मी० है तथा कर्ण 5 सें० मी० है।

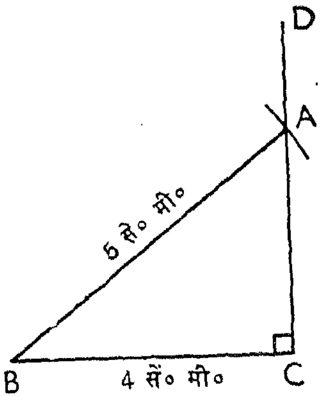
हम वाँछित समकोण त्रिभुज की रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : हम एक रेखाखंड, उदाहरणार्थ, BC=4 सें० मी० की रचना करते हैं।

चरण 2 : C पर हम $CD \perp BC$ की रचना करते हैं।

चरण 3 : B को केन्द्र मानकर तथा कर्ण के बराबर (अर्थात् 5 सें० मी०) की त्रिज्या लेकर हम एक चाप खींचते हैं जो कि CD को मान लीजिए A पर काटता है। (देखिए आकृति 14.10)

चरण 4 : हम A और B को मिलाते हैं।



आकृति 14.10

तब ABC ही वाँछित समकोण त्रिभुज है जिसमें भुजा BC=4 सें० मी०, कर्ण AB=5 सें० मी० तथा $\angle C$ एक समकोण है।

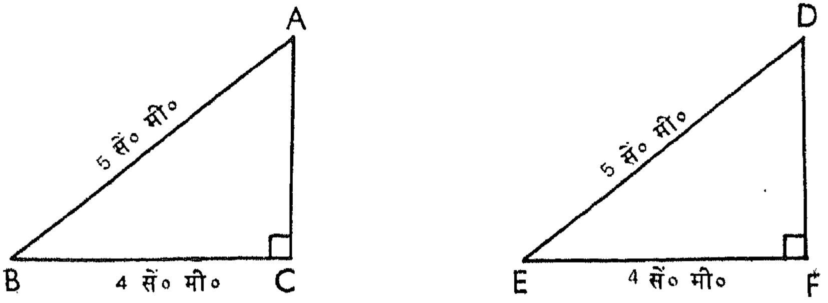
अगले अनुच्छेद में हम ऐसे समकोण त्रिभुजों की **सर्वांगसमता** के प्रश्न पर विचार करेंगे।

14.9 दो समकोण त्रिभुजों की सर्वांगसमता जबकि एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के समान हों

आइए एक पतले गत्ते पर समकोण त्रिभुजों के ऐसे कई युग्म बनाएँ कि प्रत्येक युग्म में एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के समान हों। (देखिए आकृति 14.11)

हम क्या देखते हैं ? हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में दोनों त्रिभुज **सर्वांगसम** हैं। अतः हम कहते हैं कि **दो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के समान हों।**

चूँकि एक समकोण (right angled) त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के समान हैं, अतः हम उपर्युक्त गुण को **लम्ब-कर्ण-भुजा (right-hypotenuse-side)** या संक्षेप में **RHS सर्वांगसमता नियम** कहते हैं।



आकृति 14.11

टिप्पणी : पहले की स्थितियों की ही तरह, हम देखते हैं कि **यदि एक समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा दिए हुए हों तो उसके आकार और साइज़ पूर्णतया निर्धारित हो जाते हैं।**

14.10 एक महत्वपूर्ण पर्यवेक्षण

अभी तक हमने त्रिभुजों की जो रचनाएँ की हैं उन सभी में **हमें त्रिभुज के तीन अवयव दिए हुए हैं जिनमें से कम से कम एक एक भुजा अवश्य है।** यहाँ तक कि RHS की स्थिति में भी अवयवों की संख्या तीन अर्थात् समकोण, कर्ण और एक भुजा है। अतः हम कहते हैं कि **व्यापक रूप में यदि एक त्रिभुज के तीन अवयव दिए हुए हों जिनमें कम से कम एक एक भुजा अवश्य हो तो उस त्रिभुज के आकार और साइज़ पूर्णतया निर्धारित हो जाते हैं।**

प्रश्नावली 14.4

1. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए जबकि दिया है कि

(i) कर्ण=6.3 सें० मी०, एक भुजा=4.1 सें० मी०

(ii) कर्ण=5.9 सें० मी०, एक भुजा=3.7 सें० मी०

(iii) कर्ण=5 सें० मी०, एक भुजा=3 सें० मी०

2. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए जिसमें कर्ण एक भुजा का दुगुना हो। उसके न्यून कोणों को मापिए।
3. अपने 30° सेट-स्क्वायर की भुजाओं को मापिए। जाँच कीजिए कि उसका कर्ण 30° कोण वाले किनारे (edge) की लम्बाई का दुगुना है।

14.11 संदिग्ध स्थिति

हमने ऊपर कहा है कि **व्यापक रूप में यदि एक त्रिभुज के तीन अवयव दिए हुए हों जिनमें कम से कम एक एक भुजा अवश्य हो तो उस त्रिभुज के आकार और साइज़ पूर्णतया निर्धारित हो जाते हैं।** परन्तु इस कथन का एक अपवाद भी है। जैसा कि हम नीचे देखेंगे कि यदि दो भुजाएँ और इन भुजाओं में से एक का सम्मुख कोण (अर्थात् बीच का कोण नहीं) दिए हुए हों तो त्रिभुज के आकार और साइज़ पूर्णतया निर्धारित करना सदैव संभव नहीं होता।

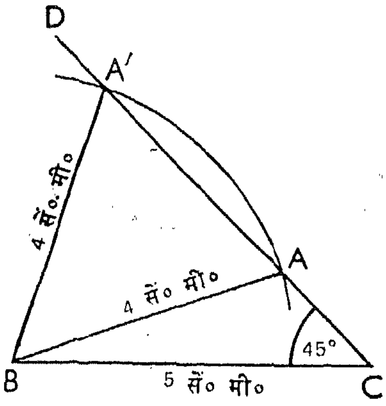
आइए एक त्रिभुज ABC की रचना करने का प्रयत्न करें जिसमें AB=4 सें० मी०, BC=5 सें० मी० तथा $\angle C = 45°$ है। हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : हम एक रेखाखंड BC=5 सें० मी० की रचना करते हैं।

चरण 2 : C पर हम $\angle BCD = 45°$ की रचना करते हैं।

चरण 3 : B को केन्द्र मानकर और 4 सें० मी० की त्रिज्या लेकर हम एक चाप खींचते हैं। (देखिए आकृति 14.12)

हम देखते हैं कि यह चाप CD को, उदाहरणार्थ, दो बिंदुओं A और A′ पर काटता है।



आकृति 14.12

चरण 4 : हम A और B तथा A′ और B को मिलाते हैं। तब त्रिभुजों ABC और A′ BC में से प्रत्येक के वाँछित तीन अवयव हैं। परन्तु दोनों त्रिभुज आकार तथा साथ ही साइज़ में भिन्न हैं। इस प्रकार हम एक संदिग्ध (ambiguous) स्थिति में आ जाते हैं

कि इन दोनों त्रिभुजों में से किस त्रिभुज को वाँछित त्रिभुज माना जाए। इसी कारण हम इस स्थिति को **संदिग्ध स्थिति** कहते हैं।

टिप्पणी 1 : पाठक यह ध्यान दें कि यदि AB, B से CD पर लम्ब से छोटा है तो ऐसे किसी भी त्रिभुज की रचना नहीं की जा सकती। (क्यों ?)

टिप्पणी 2 : यदि हमें निम्न में से कोई भी एक दिया हो तो संदिग्धता समाप्त हो जाती है और हम एक ही त्रिभुज प्राप्त करते हैं :

(i) $\angle C = 90°$,

अथवा (ii) **AB, B से CD पर लम्ब के समान हो, जिससे $\angle A = 90°$ हो जाता है।**

(i) और (ii) में से प्रत्येक में हम एक समकोण त्रिभुज प्राप्त करते हैं।

मुख्य संकल्पनाएँ

त्रिभुजों की रचना	ASA सर्वांगसमता नियम
SSS सर्वांगसमता नियम	RHS सर्वांगसमता नियम
SAS सर्वांगसमता नियम	संदिग्ध स्थिति

एकक XV

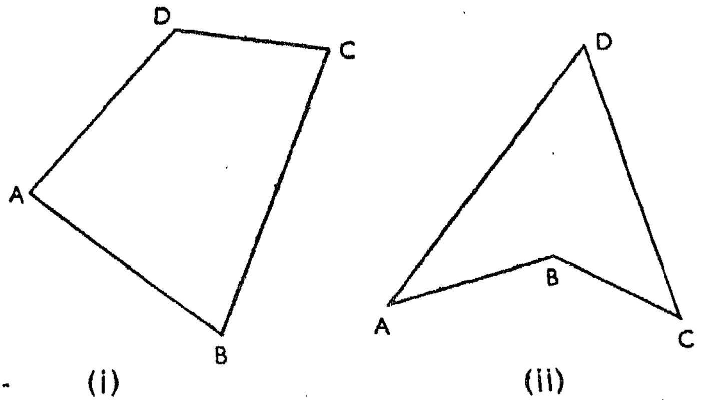
चतुर्भुज

इस एकक में हम चार भुजाओं से बनी आकृतियों अर्थात् चतुर्भुजों (quadrilaterals) के बारे में अध्ययन करेंगे। हम यह भी सीखेंगे कि कुछ चतुर्भुजों की रचना किस प्रकार की जाती है जबकि उनके कुछ अवयव (भुजाएँ और कोण) दिए हुए हों।

15.1 भूमिका

हम तीन ('त्रि') **भुजाओं** ('भुज') से बनी आकृतियों अर्थात् **त्रिभुजों** से पहले ही परिचित हैं। हम वर्ग, आयत, इत्यादि के बारे में भी पढ़ चुके हैं जो कि चार भुजाओं से बनी आकृतियाँ हैं। अब हम **चतुर्भुजों** अर्थात् **चार (quadri) भुजाओं (laterals)** से बनी आकृतियों के बारे में कुछ और पढ़ेंगे। हम यह भी सीखेंगे कि कुछ चतुर्भजों की रचना किस प्रकार की जाती है जबकि उनके कुछ अवयव अर्थात् भुजाएँ और कोण दिए हुए हों।

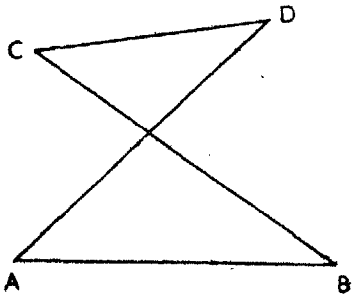
आइए निम्न आकृतियों पर विचार करें :



आकृति 15.1

ऐसी आकृतियाँ जो चार रेखाखंडों से बनी हैं **चतुर्भुज** कहलाती हैं। **चार ऐसे रेखाखंडों से बनी बंद आकृति कि कोई दो रेखाखंड काटते हुए परस्पर पार (cross) न करें चतुर्भुज कहलाती है।**

यह स्पष्ट है कि आकृति 15.2 में ABCD एक चतुर्भुज नहीं है।



आकृति 15.2

आइए आकृति 15.1 का पुनः अवलोकन करें। रेखाखंड AB, BC, CD और DA चतुर्भुज ABCD की **भुजाएँ** कहलाती हैं। बिंदु A, B, C और D चतुर्भुज ABCD के **शीर्ष** कहलाते हैं। साथ ही A,C और B,D **सम्मुख शीर्षों (opposite vertices)** के युग्म हैं। सम्मुख शीर्षों को मिलाने वाले रेखाखंड अर्थात् रेखाखंड AC और BD चतुर्भुज ABCD के **विकर्ण (diagonals)** कहलाते हैं।

ध्यान दीजिए कि चतुर्भुज के प्रत्येक शीर्ष पर एक कोण बना हुआ है। ये चतुर्भुज के **अंतःकोण** या संक्षेप में **कोण** कहलाते हैं। इस प्रकार कोण DAB, ABC, BCD और CDA चतुर्भुज ABCD के कोण हैं। प्रायः जब कोई

भ्रम न होता हो तो हम इन कोणों को क्रमशः $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$ से व्यक्त करते हैं।

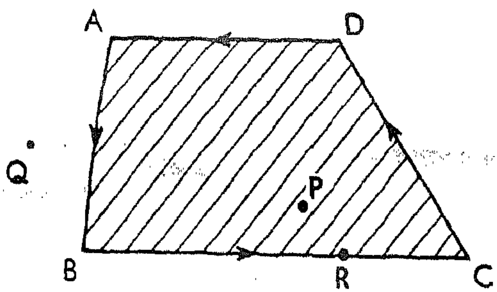
दो भुजाएँ जैसे कि AB और BC, जिनमें एक शीर्ष (B) उभयनिष्ठ है चतुर्भुज की **आसन्न भुजाएँ (adjacent sides)** कहलाती हैं। दो भुजाएँ जैसे कि AB और CD जिनमें कोई शीर्ष उभयनिष्ठ नहीं है चतुर्भुज की **सम्मुख भुजाओं (opposite sides)** का एक युग्म कहलाता है। सम्मुख भुजाओं के दो युग्म हैं। हमने एक युग्म आपको ऊपर बता दिया है। क्या आप दूसरा युग्म बता सकते हैं ?

अंत में, चतुर्भुज ABCD की चारों भुजाओं की लम्बाइयों का योग अर्थात् AB+BC+CD+DA चतुर्भुज का **परिमाप (perimeter)** कहलाता है।

अगले अनुच्छेद में हम चतुर्भुज के अभ्यंतर और बहिर्भाग के बारे में अध्ययन करेंगे।

15.2 चतुर्भुज का अभ्यंतर और बहिर्भाग

आइए एक कागज के पन्ने पर एक चतुर्भुज ABCD खींचें। यह चतुर्भुज तल के (सभी) बिंदुओं को तीन भागों में बाँट देता है। **पहला**, बिंदु जैसे कि P जिन्हें हम कहते हैं कि ये चतुर्भुज के अंदर स्थित हैं। **दूसरा, बिंदु जैसे कि Q जिन्हें** हम कहते हैं कि ये चतुर्भुज के **बाहर** स्थित हैं। **और तीसरा**, बिंदु जैसे कि R जो कि चतुर्भुज की **एक भुजा पर** स्थित हैं। (देखिए आकृति 15.3)



आकृति 15.3

तल का वह भाग जिसमें ऐसे सभी बिंदु P सम्मिलित हैं चतुर्भुज का अभ्यंतर कहलाता है।

ऐसे सभी बिंदुओं R से जो बनता है उसे **अभ्यंतर की सीमा (boundary of the interior)** कहा जाता है। चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर और उसकी सीमा को मिलाकर **चतुर्भुजीय क्षेत्र (quadrilateral region) ABCD** कहते हैं।

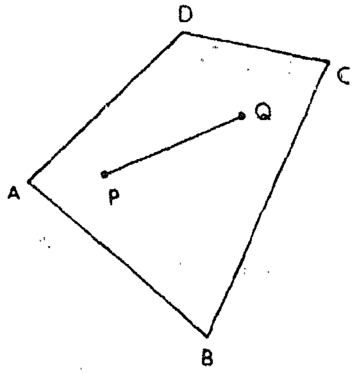
तल का वह भाग जिसमें ऐसे सभी बिंदु Q सम्मिलित हैं चतुर्भुज का बहिर्भाग कहलाता है।

आइए कल्पना करें कि हम चतुर्भुज ABCD के चारों ओर उसकी भुजाओं के अनुदिश वामावर्त दिशा में चल रहे हैं जैसा कि आकृति 15.3 में तीरों द्वारा दर्शाया गया है। हमारे किस ओर चतुर्भुज का अभ्यंतर स्थित होगा ? (बाईं या दाईं ?) हमारे किस ओर बहिर्भाग स्थित होगा ? हम देखते हैं कि चतुर्भुज का **अभ्यंतर** सदैव हमारे **बाईं** ओर स्थित है तथा **बहिर्भाग** सदैव हमारे **दाईं** ओर। इस पर्यवेक्षण का चतुर्भुज के अभ्यंतर और बहिर्भाग के बीच भेद बताने में एक नियम के रूप में प्रयोग किया जा सकता है।

हम यह भी देखते हैं कि यदि हम चतुर्भुज के अभ्यंतर के किसी बिंदु से उसके बहिर्भाग के किसी बिंदु तक जाना चाहें अथवा बहिर्भाग के किसी बिंदु से अभ्यंतर के किसी बिंदु तक जाना चाहें तो हमें चतुर्भुज को अवश्य ही **पार करना (काटना)** पड़ेगा।

15.3 उत्तल और अवतल चतुर्भुज

आइए पुनः आकृति 15.1 पर विचार करें। आइए 15.1 (i) में उसके अभ्यंतर में कोई दो बिंदु P और Q लें (देखिए आकृति 15.4) और P और Q को मिलाएँ। हम क्या देखते हैं ? हम देखते हैं कि **रेखाखंड PQ के सभी बिंदु चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर में स्थित हैं।** अर्थात् यह कहना चाहिए कि **P और Q को मिलाने वाला रेखाखंड (PQ) पूर्णतया चतुर्भुज ABCD के अंदर स्थित है।**

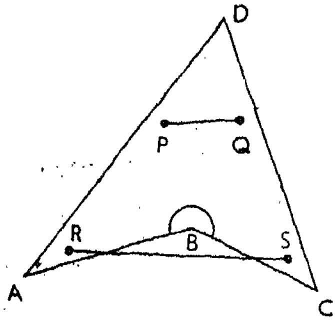


आकृति 15.4

आइए उपर्युक्त चतुर्भुज के अभ्यंतर में बिंदुओं के अनेक युग्म लेकर इस प्रयोग को दोहराएँ। हम देखते हैं कि **चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर के किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड पूर्णतया चतुर्भुज के अंदर स्थित है।** ऐसा चतुर्भुज एक **उत्तल चतुर्भुज (convex quadrilateral) कहलाता है।** दूसरे

शब्दों में, ऐसा चतुर्भुज जिसके अभ्यंतर में स्थित किन्ही दो बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड पूर्णतया उस चतुर्भुज के अंदर स्थित हो एक उत्तल चतुर्भुज कहलाता है।

अब आइए आकृति 15.1 (ii) पर विचार करें और बिंदु P, Q, R और S इस प्रकार लें जैसे कि आकृति 15.5 में दिखाए गए हैं। हम देखते हैं कि यद्यपि रेखाखंड PQ पूर्णतया चतुर्भज के अन्दर स्थित है परन्तु **रेखाखंड RS पूर्णतया चतुर्भुज के अन्दर स्थित नहीं है।** दूसरे शब्दों में, चतुर्भुज के अभ्यंतर में स्थित दो बिंदुओं R और S को मिलाने वाला रेखाखंड **पूर्णतया** चतुर्भुज के अन्दर **स्थित नहीं है। ऐसे** चतुर्भुजों को हम **अवतल (non-convex** या **concave)** या **अंतः प्रविष्ट (re-entrant)** चतुर्भुज कहते हैं।



आकृति 15.5

टिप्पणी 1 : हम देखते हैं कि एक उत्तल चतुर्भुज के दोनों विकर्ण पूर्णतया उसके अभ्यंतर में स्थित होते हैं। परन्तु एक अवतल चतुर्भुज की स्थिति में एक विकर्ण पूर्णतया अभ्यंतर में स्थित होता है जब कि दूसरा नहीं।

टिप्पणी 2 : हम यह भी देखते हैं कि एक उत्तल चतुर्भुज में प्रत्येक कोण 180° से कम होता है। एक अवतल चतुर्भुज में एक कोण **प्रतिवर्ती (reflex)** अर्थात् 180° से बड़ा होता है जैसे कि आकृति 15.5 में ∠ABC है।

इस पुस्तक में हम अवतल चतुर्भुजों से अपना सम्बन्ध नहीं रखेंगे। साथ ही, अन्यथा जब तक कि कहा न जाए शब्द 'चतुर्भुज' से हमारा तात्पर्य एक **'उत्तल चतुर्भुज' से होगा।**

प्रश्नावली 15.1

1. एक त्रिभुज की भुजाओं के अनुदिश वामावर्त दिशा में चलिए। क्या उसका अभ्यंतर सदैव आपके बाईं ओर स्थित है ? क्या उसका बहिर्भाग सदैव आपके दाईं ओर स्थित है ?

2. एक वृत्त के अनुदिश वामावर्त दिशा में चलिए। जाँच कीजिए कि उसका अभ्यंतर सदैव आपके बाईं ओर स्थित है जबकि उसका बहिर्भाग सदैव आपके दाईं ओर स्थित है।

3. क्या त्रिभुज एक उत्तल आकृति है ? सकारण उत्तर दीजिए।

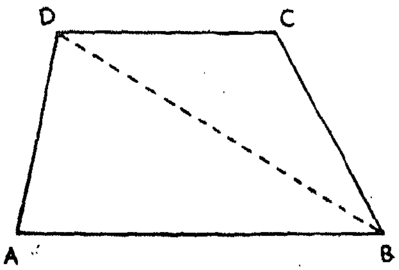
4. क्या वृत्त एक उत्तल आकृति है ? सकारण उत्तर दीजिए।

15.4 चतुर्भुज के कोणों का योग

आपको याद होगा कि एक त्रिभुज के कोणों का योग 180° होता है। अब हम एक चतुर्भुज के कोणों का योग निर्धारित करने का प्रयत्न करते हैं।

मान लीजिए ABCD एक चतुर्भुज है। (देखिए आकृति 15.6) आइए B और D को मिलाएँ।

हम देखते हैं कि विकर्ण BD चतुर्भुज ABCD को दो त्रिभुजों ABD और BCD में विभाजित करता है।



आकृति 15.6

अब △ ABD में,

$$\angle DAB + \angle ABD + \angle BDA = 180° \qquad \text{(क्यों ?)} \qquad (1)$$

तथा △ BCD में,

$$\angle DBC + \angle BCD + \angle CDB = 180° \qquad \text{(क्यों ?)} \qquad (2)$$

हम (1) और (2) को जोड़ते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\angle DAB + \angle ABD + \angle BDA + \angle DBC$$
$$+ \angle BCD + \angle CDB = 180° + 180°$$

अर्थात्,

$$\angle DAB + \angle ABD + \angle DBC + \angle BCD$$
$$+ \angle BDA + \angle CDB = 360°$$

हम देखते हैं कि $\angle ABD + \angle DBC = \angle ABC$

तथा $\angle BDA + \angle CDB = \angle CDA$

अतः, $\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 360°$

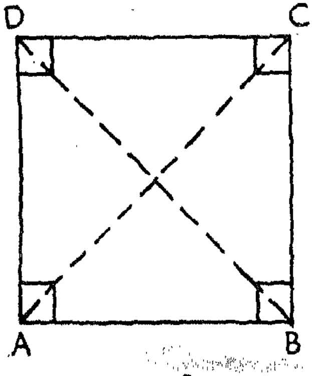
इस प्रकार हमने सिद्ध कर लिया है कि **चतुर्भुज ABCD के कोणों का योग** 360° है ।

अगले अनुच्छेद में हम कुछ विशेष प्रकार के चतुर्भुजों जिनसे हम पहले से ही परिचित हैं का पुनरावलोकन करेंगे। हम ऐसे कुछ अन्य चतुर्भुजों का परिचय भी करायेंगे ।

15.5 विशेष प्रकार के चतुर्भुज

(1) वर्ग : वर्ग (square) ऐसा चतुर्भुज होता है जिसमें सभी भुजाएँ समान होती हैं तथा चारों कोणों में से प्रत्येक एक समकोण होता है ।

आकृति 15.7 में ABCD एक वर्ग है ।



आकृति 15.7

हम देखते हैं कि

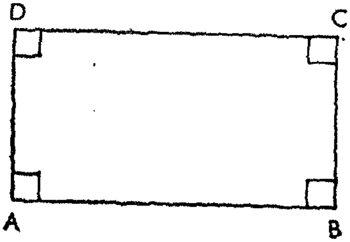
$AB = BC = CD = DA$

तथा $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

पाठक को याद होगा कि वर्ग ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं ।

(2) आयत : आयत (rectangle) ऐसा चतुर्भुज होता है जिसमें सम्मुख भुजाओं के युग्म समान होते हैं तथा चारों कोणों में से प्रत्येक एक समकोण होता है ।

आकृति 15.8 में ABCD एक आयत है ।



आकृति 15.8

हम देखते हैं कि

$AB = DC, \ BC = AD$

तथा $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$

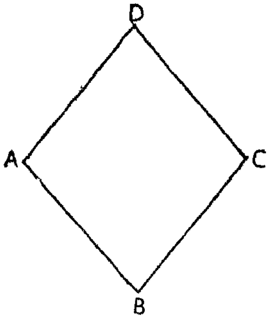
प्रायः लम्बी भुजा (अर्थात् AB या DC) आयत की लम्बाई (**length**) कहलाती है तथा छोटी भुजा (अर्थात् BC या AD) चौड़ाई (**breadth** या **width**) कहलाती है।

(3) समचतुर्भुज : समचतुर्भुज (rhombus) ऐसा चतुर्भुज होता है जिसमें सभी भुजाएँ समान होती हैं।

आकृति 15.9 में ABCD एक समचतुर्भुज है।

हम देखते हैं कि

$$AB = BC = CD = DA$$



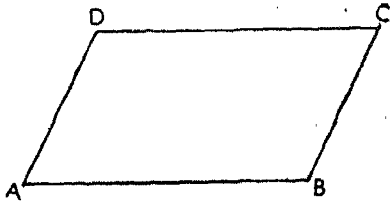
आकृति 15.9

(4) समांतर चतुर्भुज : समांतर चतुर्भुज (parallelogram) ऐसा चतुर्भुज होता है जिसमें सम्मुख भुजाओं के युग्म समांतर होते हैं।

आकृति 15.10 में ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

हम देखते हैं कि

$$AB \parallel DC \text{ और } BC \parallel AD$$



आकृति 15.10

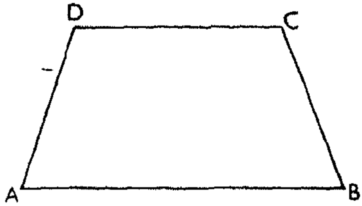
[हम समांतर चतुर्भुजों के गुणों का एकक XVI में अध्ययन करेंगे। यहाँ हम केवल यह कह रहे हैं कि एक वर्ग, एक आयत और एक समचतुर्भुज में से प्रत्येक एक विशेष प्रकार का समांतर चतुर्भुज होता है।]

(5) समलंब : समलंब (trapezium) एक ऐसा चतुर्भुज होता है जिसमें सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर होता है तथा दूसरा युग्म समांतर नहीं होता।

आकृति 15.11 में ABCD एक समलंब है।

हम देखते हैं कि

$$AB \parallel DC$$

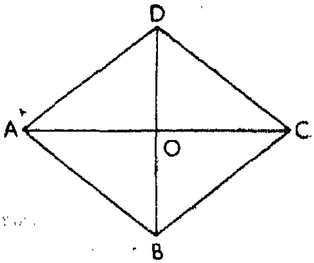


आकृति 15.11

परन्तु यह कि AD ∦ BC (जिसे AD, BC के समांतर नहीं है पढ़ा जाता है)।

प्रश्नावली 15.2

1. एक चतुर्भुज के तीन कोण $60°$, $130°$ और $50°$ हैं। उसका चौथा कोण ज्ञात कीजिए।
2. निम्न में से कौन-कौन से कथन सत्य हैं और क्यों ?
   (क) सभी वर्ग आयत होते हैं।
   (ख) सभी आयत वर्ग होते हैं।
   (ग) सभी समचतुर्भुज वर्ग होते हैं।
   (घ) सभी वर्ग समचतुर्भुज होते हैं।
   (ङ) सभी आयत समचतुर्भुज होते हैं।
   (च) सभी समचतुर्भुज आयत होते हैं।
3. आकृति 15.12 में ABCD एक समचतुर्भज है। उसके विकर्ण AC और BD परस्पर बिंदु O पर काटते हैं।
   (i) क्या A, B और D से समदूरस्थ है ?
   (ii) क्या C, B और D से समदूरस्थ है ?
   (iii) क्या AC, B और D की सममिति अक्ष है ?
   (iv) क्या AC, BD का लम्ब समद्विभाजक है ?
   (v) क्या BD, AC का लम्ब समद्विभाजक है ?



आकृति 15.12

सकारण उत्तर दीजिए।

[हम देखते हैं कि **समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।**]

15.6 चतुर्भुजों की रचना

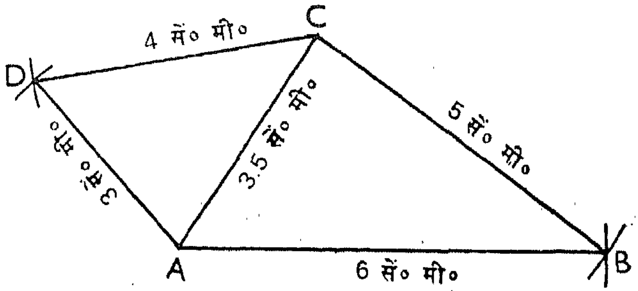
अब हम सीखेंगे कि किस प्रकार एक चतुर्भुज की रचना की जाती है जबकि उसके अवयव उचित संख्या में दिए हुए हैं।

[रचना की सभी स्थितियों में पाठक को चाहिए कि वास्तव में रचना करने से पहले वह चतुर्भुज का मोटे तौर पर एक चित्र बना ले और दिए हुए अवयवों को चित्र में लिख ले ।]

15.6.1 चतुर्भुज की रचना करना जबकि चार भुजाएँ और एक विकर्ण दिया हुआ है ।

मान लीजिए हमें चतुर्भुज ABCD की रचना करनी है जिसमें AB=6 सें० मी०, BC=5 सें० मी०, CD=4 सें० मी०, DA=3 सें० मी० तथा विकर्ण AC=3.5 सें० मी० है ।

हम वाँछित चतुर्भुज की रचना निम्न चरणों में करते हैं :



आकृति 15.13

चरण 1 : हम एक रेखाखंड AC=3.5 सें० मी० खींचते हैं ।

चरण 2 : A को केन्द्र मानकर और 3 सें० मी० की त्रिज्या लेकर AC के एक ओर हम एक चाप खींचते हैं ।

चरण 3 : फिर C को केन्द्र मानकर और 4 सें० मी० की त्रिज्या लेकर हम AC के उसी ओर, जिस ओर कि चरण 2 में था, एक चाप खींचते हैं । मान लीजिए यह चाप चरण 2 में खींचे गए चाप को बिंदु D पर काटता है । (देखिए आकृति 15.13)

चरण 4 : हम A और D तथा C और D को मिलाते हैं ।

चरण 5 : अब, A को केन्द्र मानकर और 6 सें० मी० की त्रिज्या लेकर हम AC के उस ओर जिस ओर D नहीं है एक चाप खींचते हैं ।

चरण 6 : C को केन्द्र मानकर और 5 सें० मी० की त्रिज्या लेकर हम AC के उसी ओर, जिस ओर कि चरण 5 में था, एक चाप खींचते हैं। मान लीजिए यह चाप चरण 5 में खींचे गए चाप को बिंदु B पर काटता है। (देखिए आकृति 15.13)

चरण 7 : अंत में हम A और B तथा C और B को मिलाते हैं।

तब ABCD ही वाँछित चतुर्भुज है।

[पाठक ध्यान दें कि उपर्युक्त रचना इसके समान है कि दी हुई भुजाओं वाले दो त्रिभुजों ABC और ADC की रचना इस प्रकार की जाए कि B और D, AC के विपरीत ओर स्थित हों।]

प्रश्नावली 15.3

1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जबकि दिया है कि

(i) AB=3.9 सें० मी०, BC=4.3 सें० मी०, CD=5 सें० मी०, DA=5.9 सें० मी० और AC=5.9 सें० मी०

(ii) AB=BC=3.6 सें० मी०, CD=DA=4.5 सें० मी० और BD=6.3 सें० मी०

15.6.2 चतुर्भुज की रचना करना जबकि तीन भुजाएँ और दोनों विकर्ण दिए हुए हैं

मान लीजिए हमें चतुर्भुज ABCD की रचना करनी है जिसमें AD=5 सें० मी०, AB=3 सें० मी०, BC=2.5 सें० मी०, AC=4 सें० मी० और BD=7 सें० मी० है।

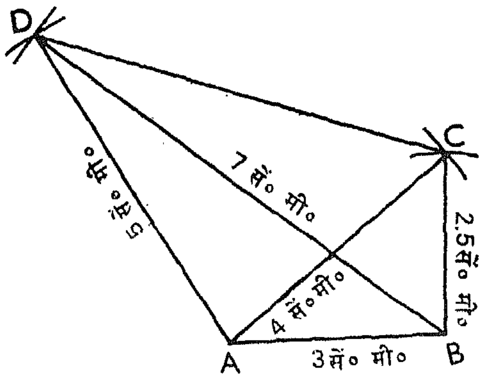
हम वाँछित चतुर्भुज की रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : हम एक रेखाखंड AB=3 सें० मी० खींचते हैं।

चरण 2 : AD=5 सें० मी० और BD=7 सें० मी० लेकर हम AB पर एक △ABD की रचना करते हैं।

[**संकेत :** SSS रचना का प्रयोग कीजिए।]

चरण 3 : AC=4 सें० मी० और BC=2.5 सें० मी० लेकर पुनः AB पर तथा AB के उसी ओर जिस ओर △ABD है हम एक △ ABC की रचना करते हैं। (देखिए आकृति 15.14)



आकृति 15.14

चरण 4 : अंत में, हम C और D को मिलाते हैं। तब, ABCD ही वाँछित चतुर्भुज है।

प्रश्नावली 15.4

1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जबकि दिया है कि

(i) AB=2.9 सें० मी०, BC=3.4 सें० मी०, CD=4.3 सें० मी०, AC=5.3 सें० मी० और BD=5.7 सें० मी०

(ii) AB=BC=CD=5 सें० मी०, AC=6.7 सें० मी० और BD=5.9 सें० मी०

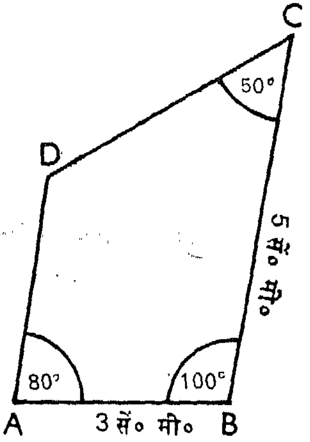
15.6.3 चतुर्भुज की रचना करना जबकि दो आसन्न भुजाएँ और तीन कोण दिए हुए हैं

मान लीजिए हमें एक चतुर्भुज ABCD की रचना करनी है जिसमें AB=3 सें० मी०, BC=5 सें० मी०, $\angle A=80°$, $\angle B=100°$ तथा $\angle C=50°$ है।

हम यह रचना पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ रहे हैं।

[**संकेत** : देखिए आकृति 15.15]

[पाठक ध्यान दें कि यदि कोणों A,B और C के स्थान पर चतुर्भुज ABCD के कोई भी तीन कोण दिए हों तो चौथा कोण ज्ञात करने के लिए हम **कोण-योग-परिणाम** का प्रयोग कर सकते हैं। इसलिए हम पुनः उपर्युक्त रचना का प्रयोग कर सकते हैं।]



आकृति 15.15

प्रश्नावली 15.5

1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जबकि दिया है कि

(i) $\angle A=75°$, $\angle B=85°$, $\angle C=110°$, AB=4.1 सें० मी० और BC=3.9 सें० मी०

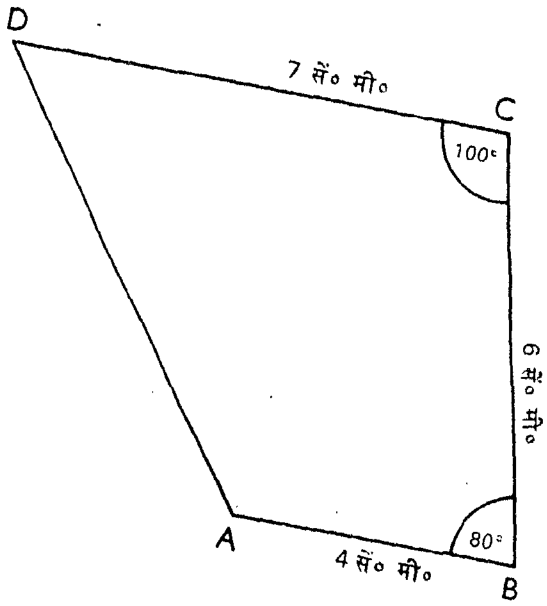
(ii) $\angle D=90°$, $\angle A=67°$, $\angle B=105°$, DA=AB=5.3 सें०मी०

15.6.4 चतुर्भुज की रचना करना जबकि तीन भुजाएँ और दो बीच के कोण दिए हुए हैं

मान लीजिए हमें एक चतुर्भुज ABCD की रचना करनी है जिसमें AB=4 सें० मी०, BC=6 सें० मी०, CD=7 सें० मी०, $\angle B=80°$ और $\angle C=100°$ है।

पुनः इस रचना को हम पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ रहे हैं।

[**संकेत** : देखिए आकृति 15.16]



आकृति 15.16

प्रश्नावली 15.6

1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जबकि दिया है कि

(i) AB=4.9 सें० मी०, BC=3.8 सें० मी०, CD=4.4 सें० मी०, $\angle B=90°$ और $\angle C=85°$

(ii) BC=3.6 सें० मी०, CD=4.5 सें० मी०, DA=5 सें० मी०, $\angle C=75°$ और $\angle D=120°$

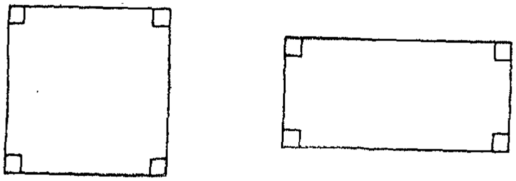
15.7 चतुर्भुजों की सर्वांगसमता

हम यह सीख चुके हैं कि कुछ स्थितियों में चतुर्भुजों की रचना किस प्रकार की जाती है। **प्रत्येक स्थिति में चतुर्भुज के कितने अवयव दिए हुए थे? हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में पाँच अवयव दिए हुए थे जिनमें कम से कम दो भुजाएँ थीं।**

[तीन भुजाओं से बनी आकृति अर्थात् त्रिभुज की रचना के लिए हमें केवल तीन अवयवों की आवश्यकता पड़ी थी जिनमें कम से कम एक भुजा थी। अतः यह सोचा जा सकता है कि चार भुजाओं से बनी आकृति अर्थात् चतुर्भुज के लिए चार अवयवों की आवश्यकता पड़नी चाहिए थी जिनमें कम से कम एक भुजा होनी चाहिए थी। परन्तु ऐसा नहीं है और **हमें पाँच अवयवों की आवश्यकता है जिनमें कम से कम दो भुजाएँ अवश्य होनी चाहिए।**]

आप अगली कक्षाओं में अध्ययन करेंगे कि त्रिभुज की स्थिति में उसके दो कोणों के ज्ञान से (तब तीसरा स्वतः ही ज्ञात हो जाता है) उसका आकार निश्चित हो जाता हैं। फिर उसका साइज़ निश्चित करने के लिए एक भुजा की लम्बाई की आवश्यकता पड़ती है।

एक चतुर्भुज के लिए, उसके चारों कोणों का ज्ञान होने से भी उसका आकार निश्चित नहीं होता। यह देखने के लिए आइए एक आयत की एक वर्ग से तुलना



आकृति 15.17

करें। इन दोनों में सभी कोण समकोण हैं (देखिए आकृति 15.17) परन्तु फिर भी उनके आकार भिन्न-भिन्न हैं।

हम बाद में पढ़ेंगे कि **उपर्युक्त चतुर्भुजों की स्थिति में, दो भुजाओं के अनुपात तथा तीन कोणों के ज्ञान से चतुर्भुजों का आकार निश्चित हो जाता है तथा दो भुजाओं और तीन कोणों के ज्ञान से उसका आकार तथा साइज़ दोनों ही निश्चित हो जाते हैं।**

यदि हम अपने को उत्तल चतुर्भुजों तक सीमित न रखें तो हम देखेंगे कि दी हुई चार भुजाओं और एक कोण तक से दो चतुर्भुज संभव हैं। इस प्रकार उन अवयवों की न्यूनतम संख्या देना कठिन हो जाएगा जिनके ज्ञान से हम एक चतुर्भुज के आकार और साइज़ को पूर्णतया निर्धारित करने में समर्थ हो सकेंगे।

इसके परिणामस्वरूप चतुर्भुजों की सर्वांगसमता के लिए वैसे नियम देना इतना सरल नहीं है जैसे कि हमने त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए SSS, SAS सर्वांगसमता नियम आदि दिए थे।

मुख्य संकल्पनाएँ

चतुर्भुज के अवयव	वर्ग
विकर्ण	आयत
अभ्यंतर और बहिर्भाग	समचतुर्भुज
चतुर्भुजीय क्षेत्र	समांतर चतुर्भुज
उत्तल और अवतल चतुर्भुज	समलंब
चतुर्भुज के कोणों का योग	चतुर्भुजों की रचना
	सर्वांगसमता

एकक XVI

समांतर रेखाएँ और समांतर चतुर्भुज

हम सीखेंगे कि दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी किस प्रकार मापी जाती है। हम समांतर रेखाओं द्वारा निर्मित आकृतियों अर्थात् समांतर चतुर्भुजों का अध्ययन करेंगे। हम यह भी सीखेंगे कि समांतर चतुर्भुजों और कुछ विशेष प्रकार के चतुर्भुजों जैसे कि वर्ग, आयत, इत्यादि की रचना किस प्रकार की जाती है।

16.1 पुनरावलोकन

आप समांतर रेखाओं और उनके कुछ गुणों से पहले ही से परिचित हैं। आपको अपनी पिछली कक्षाओं से निम्न संकल्पनाओं का पुनरावलोकन करना चाहिए :

समांतर रेखाएँ : दो समांतर रेखाओं के बीच की 'दूरी'

एक तिर्यक रेखा (transversal) द्वारा दो रेखाओं से बनाए गए कोण : एकांतर कोण (alternate angles), संगत कोण (corresponding angles), अंतः कोण और बाह्य कोण।

विशेष रूप से आपको निम्न परिणामों का पुनरावलोकन करना चाहिए :

यदि एक तिर्यक रेखा दो समांतर रेखाओं को काटे, तो

(i) एकांतर कोणों के युग्म समान होते हैं,

(ii) संगत कोणों के युग्म समान होते हैं,

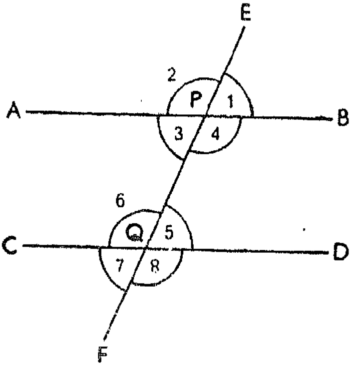
(iii) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोणों का योग 180° होता है। अर्थात् तिर्यक रेखा के एक ही ओर के दो अंतः कोण संपूरक (supplementary) होते हैं।

इस प्रकार, यदि AB और CD दो समांतर रेखाएँ हों तथा EF एक तिर्यक रेखा हो जो कि AB को P और CD को Q पर काटती है (देखिए आकृति 16.1), तो

(i) $\angle 3 = \angle 5$ तथा
$\angle 4 = \angle 6$

(ii) $\angle 1 = \angle 5, \angle 4 = \angle 8,$
$\angle 2 = \angle 6$ तथा
$\angle 3 = \angle 7$

(iii) $\angle 4 + \angle 5 = 180°$ तथा
$\angle 3 + \angle 6 = 180°$



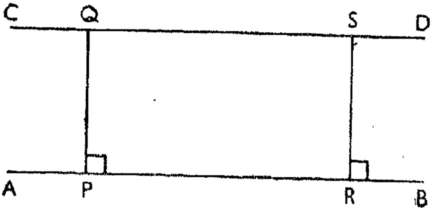
आकृति 16.1

हम यह भी जानते हैं कि यदि रेखाएँ समांतर न हों तो गुणों (i), (ii) और (iii) में से एक भी गुण सत्य नहीं है। दूसरे शब्दों में, **यदि एक तिर्यक रेखा दो रेखाओं को काटे और गुणों (i), (ii) या (iii) में से एक भी गुण सत्य हो, तो दोनों रेखाएँ समांतर होती हैं।**

16.2 दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी

आपको याद होगा कि पिछली कक्षाओं में हमने देखा था **कि यदि दो रेखाएँ समांतर हों तो प्रत्येक जगह उनके बीच की 'दूरी' समान रहती है।** परन्तु हम दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी कैसे मापें ? अब हम ऐसा करना सीखेंगे।

मान लीजिए AB और CD दो समांतर रेखाएँ हैं। इनमें से एक, उदाहरणार्थ AB, पर आइए एक बिंदु P लें। (देखिए आकृति 16.2)



आकृति 16.2

P से होकर आइए AB पर एक लम्ब की रचना करें। मान लीजिए यह लम्ब दूसरी समांतर रेखा CD को Q पर काटता है।

हम देखते हैं कि PQ, समांतर रेखाओं AB और CD की एक तिर्यक रेखा

है। क्या हम कह सकते हैं कि कोण BPQ और PQD संपूरक हैं? हाँ! (क्यों ?)

क्या Q पर PQ ⊥ CD है ? हाँ ! (क्यों ?)

इस प्रकार, हम देखते हैं कि **PQ दोनों ही समांतर रेखाओं AB और CD पर लम्ब है।**

आइए अब AB पर एक अन्य बिंदु R लें और R से होकर AB पर एक लम्ब की रचना करें। मान लीजिए यह लम्ब दूसरी समांतर रेखा CD को S पर काटता है। हम देखते हैं कि **RS भी दोनों ही समांतर रेखाओं AB और CD पर लम्ब है।** अब आइए PQ और RS को मापें। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि PQ = RS है।

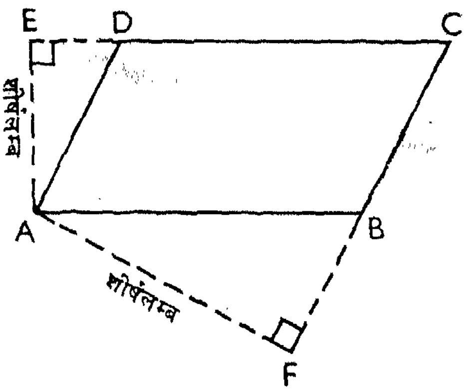
आइए AB के अनेक बिंदुओं पर ऐसे लम्बों की रचना कर इस प्रयोग को दोहराएँ। हम देखते हैं कि **ऐसे सभी लम्ब रेखाखंड PQ, RS, इत्यादि समान हैं। इनमें से किसी भी एक की लम्बाई दोनों समांतर रेखाओं के बीच की दूरी** कहलाती है। इस प्रकार, **इनमें से किसी भी एक को माप कर हम दोनों समांतर रेखाओं के बीच की दूरी माप सकते हैं।**

16.3 समांतर चतुर्भुज

आपको याद होगा कि **समांतर चतुर्भुज** ऐसा चतुर्भुज होता है **जिसकी सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समांतर** होते हैं। इस प्रकार, यदि ABCD एक समांतर चतुर्भुज है (देखिए आकृति 16.3), तो सम्मुख भुजाओं के युग्म जो समांतर हैं वे निम्न हैं:

AB, CD तथा AD, BC

अर्थात् AB ∥ CD और AD ∥ BC



आकृति 16.3

समांतर चतुर्भुज की समांतर भुजाओं के एक युग्म के बीच की दूरी समांतर चतुर्भुज का एक **शीर्षलम्ब (altitudes)** कहलाती है। हम देखते हैं कि एक समांतर चतुर्भुज के दो शीर्षलम्ब होते हैं। **A** (या **B**)

से CD पर लम्ब एक शीर्षलम्ब है तथा A (या D) से BC पर लम्ब दूसरा शीर्षलम्ब है।

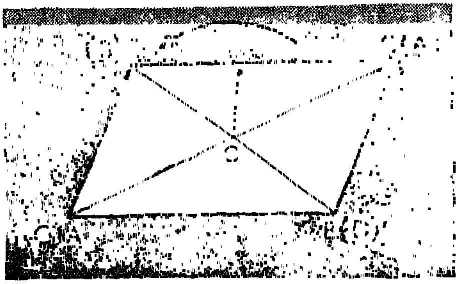
अब हम **समांतर चतुर्भुजों के कुछ गुणों** का अध्ययन करते हैं।

16.3.1 समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते हैं और सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।

आइए एक पतला गत्ता लें और उस पर एक समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना करें। फिर आइए, समांतर चतुर्भुज को गत्ते में से काट लें।

अब आइए इसके विकर्ण AC और BD खींचें और इनके प्रतिच्छेद बिंदु को O से व्यक्त करें।

अब O से होकर जाती हुई एक पिन की सहायता से समांतर चतुर्भुज को एक मेज की ऊपरी सतह पर लगाएँ। अंत में आइए एक नुकीली पेंसिल या चौक की सहायता से मेज की ऊपरी सतह पर समांतर चतुर्भुज की बाहरी रूप-रेखा खींचें।



आकृति 16.4

अब समांतर चतुर्भुज को O के सापेक्ष 180° के कोण पर घुमाइए। हम क्या देखते हैं ?

हम देखते हैं कि O के सापेक्ष A अपने सममित C से स्थान परिवर्तन कर लेता है तथा B अपने सममित D से स्थान परिवर्तन कर लेता है। (देखिए आकृति 16.4) वस्तुत; घूर्णन के बाद समांतर चतुर्भुज मूल समांतर चतुर्भुज के साथ केवल इस अंतर के साथ संपाती हो जाता है कि प्रत्येक बिन्दु O के सापेक्ष अपने सममित से स्थान परिवर्तन कर लेता है। हम यह भी देखते हैं कि $\angle A$ ठीक $\angle C$ पर पड़ता है तथा $\angle C$ ठीक $\angle A$ पर पड़ता है। साथ ही, $\angle B$ ठीक $\angle D$ पर पड़ता है तथा $\angle D$ ठीक $\angle B$ पर पड़ता है। अंत में, हम देखते हैं कि AB, CD से अपनी स्थिति परिवर्तन कर लेती है तथा BC, DA से

अपनी स्थिति परिवर्तन कर लेती है। इस प्रकार, हम देखते हैं कि **एक समांतर चतुर्भुज ABCD में,**

(i) $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$

तथा (ii) $AB = CD$ और $BC = DA$

आइए ऐसे अनेक समांतर चतुर्भुजों की रचना कर इस प्रयोग को दोहराएँ। हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में **एक समांतर चतुर्भुज में**

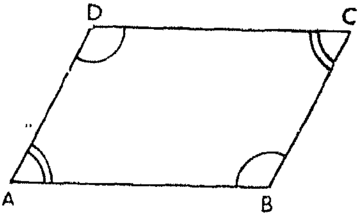
(i) सम्मुख कोणों के युग्म समान होते हैं, तथा

(ii) सम्मुख भुजाओं के युग्म समान होते हैं।

टिप्पणी : यह गुण कि सम्मुख कोणों के युग्म समान होते हैं अति सरलता से सिद्ध किया जा सकता है। हम ऐसा नीचे कर रहे हैं :

मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। (देखिए आकृति 16.5)

हम देखते हैं कि $AB \parallel DC$ है तथा AD एक तिर्यक रेखा है। साथ ही, यह कि $\angle A$ और $\angle D$ इस तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत: कोण हैं।



आकृति 16.5

अतः, $\angle A + \angle D = 180°$ (क्यों ?) (1)

पुनः हम देखते हैं कि $AD \parallel BC$ है तथा AB एक तिर्यक रेखा है।

अतः, $\angle A + \angle B = 180°$ (क्यों ?) (2)

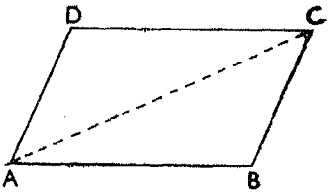
इसलिए, $\angle A + \angle D = \angle A + \angle B$ [(1) और (2) से]

अर्थात्, $\angle D = \angle B$

यह सिद्ध करना कि $\angle A = \angle C$ है पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ दिया गया है।

16.3.2 समांतर चतुर्भुज का प्रत्येक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

आइए एक पतले गत्ते पर एक समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना करें और उसका एक विकर्ण, उदाहरणार्थ AC, खींचें। (देखिए आकृति 16.6) फिर आइए समांतर चतुर्भुज को गत्ते में से काट लें और इसके बाद समांतर चतुर्भुज को विकर्ण AC



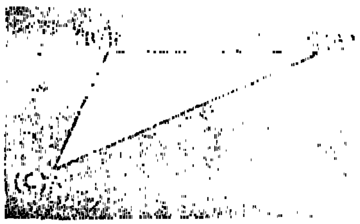
आकृति 16.6

के अनुदिश काट लें। हमें क्या प्राप्त होता है ? हमें दो त्रिभुज अर्थात् $\triangle ABC$ और $\triangle CDA$ प्राप्त होते हैं।

अब आइए $\triangle ABC$ को उठाकर $\triangle CDA$ पर इस प्रकार रखें कि $\triangle ABC$ का शीर्ष C, $\triangle CDA$ के शीर्ष A पर पड़े तथा $\triangle ABC$ की भुजा CA, $\triangle CDA$ की भुजा AC के अनुदिश पड़े। (देखिए आकृति 16.7)

हम क्या देखते हैं ? क्या $\triangle ABC$ का शीर्ष B, $\triangle CDA$ के शीर्ष D पर पड़ता है ? हम देखते हैं कि $\triangle ABC$, $\triangle CDA$ के साथ संपाती है अर्थात्, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ है।

दूसरे शब्दों में, **विकर्ण AC समांतर चतुर्भुज ABCD को दो सर्वांगसम त्रिभुजों ABC और CDA में विभाजित करता है (जिनमें AB=CD, BC=DA और AC=CA है)**।



आकृति 16.7

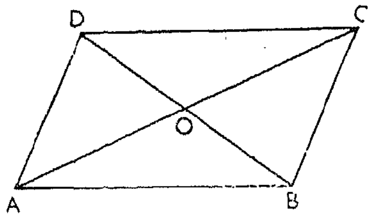
अब आइए समांतर चतुर्भुज को विकर्ण BD के अनुदिश काटकर इस प्रयोग को दोहराएँ। हम देखते हैं कि **विकर्ण BD, समांतर चतुर्भुज ABCD को दो सर्वांगसम त्रिभुजों ABD और CDB में विभाजित करता है (जिनमें AB=CD, DA=BC तथा BD=DB है)**।

आइए इस प्रयोग को अनेक समांतर चतुर्भुजों की रचना कर दोहराएँ। हम क्या देखते हैं ? हम देखते हैं कि, प्रत्येक स्थिति में, **समांतर चतुर्भुज का प्रत्येक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।**

टिप्पणी : यह देखा जा सकता **है** कि यद्यपि प्रत्येक विकर्ण समांतर चतुर्भुज को दो सर्वांगसम त्रिभुजों **में** विभाजित करता है परन्तु समांतर चतुर्भुज किसी भी विकर्ण के सापेक्ष सममित नहीं होता।

16.3.3 समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

आइए एक समांतर चतुर्भुज ABCD लें और उसके विकर्ण AC तथा BD खींचें। मान लीजिए दोनों विकर्ण परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। (देखिए आकृति 16.8)



आकृति 16.8

एकक XII से आपको याद होगा कि **एक समांतर चतुर्भुज अपने विकर्णों के प्रतिच्छेद बिन्दु के सापेक्ष समभित होता है।**

इस प्रकार, समांतर चतुर्भुज ABCD, O के सापेक्ष सममित है।

हम देखते हैं कि A और C, O के सापेक्ष सममित हैं।

अतः, $AO = CO$ (1)

पुनः हम देखते हैं कि B और D, O के सापेक्ष सममित हैं।

अतः, $BO = DO$ (2)

(1) और (2) से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि **समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।**

प्रश्नावली 16.1

1. सिद्ध कीजिए कि समांतर चतुर्भुज ABCD में $\angle A = \angle C$ है।

   [**संकेत** : अनुच्छेद 16.3.1 में टिप्पणी देखिए।]

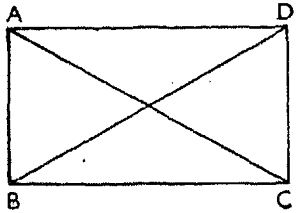
2. सिद्ध कीजिए कि समांतर चतुर्भुज का प्रत्येक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभजों में विभाजित करता है।

   [**संकेत** : SSS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग कीजिए।]

3. ABCD एक समांतर चतुर्भज है। उसके विकर्ण AC और BD परस्पर O

पर काटते हैं। क्या $\triangle OAB \cong \triangle OCD$ है ? क्या $\triangle OBC \cong \triangle ODA$ है ? सकारण उत्तर दीजिए।

4. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC और BD समान हैं। (देखिए आकृति 16.9) क्या $\triangle DAB \cong \triangle CBA$ है ? क्या $\angle DAB = \angle CBA$ है ? क्या $\angle DAB = 90°$ है ? क्या ABCD एक आयत है ? सकारण उत्तर दीजिए।



आकृति 16.9

[हम देखते हैं कि **यदि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण समान हों तो वह समांतर चतुर्भुज एक आयत होता है।**]

5. ABCD एक आयत है। क्या $\triangle DAB \cong \triangle CBA$ है ? क्या $AC = BD$ है ? सकारण उत्तर दीजिए।

[हम देखते हैं कि **आयत के विकर्ण समान होते हैं।**]

16.4 समांतर चतुर्भुजों की रचना

अब हम उन गुणों का प्रयोग करके जो हमने पिछले अनुच्छेद में पढ़े हैं समांतर चतुर्भुजों, आयतों, इत्यादि की रचना करेंगे जबकि उनके अवयव उपयुक्त संख्या में दिए हों।

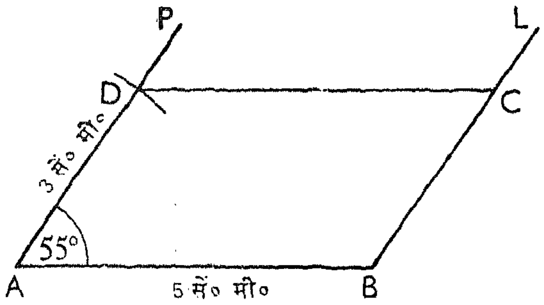
16.4.1 समांतर चतुर्भुज की रचना करना जबकि दो आसन्न भुजाएँ और बीच का कोण दिया हुआ है

मान लीजिए हमें एक समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना करनी है जिसमें $AB = 5$ सें० मी०, $AD = 3$ सें० मी० तथा $\angle A = 55°$ है।

हम वाँछित समांतर चतुर्भुज की रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : हम एक रेखाखंड $AB = 5$ सें० मी० खींचते हैं।

चरण 2 : A पर हम एक कोण $\angle BAP = 55°$ की रचना करते हैं। (देखिए आकृति 16.10)



आकृति 16.10

चरण 3 : AP में से हम एक रेखाखंड AD=3 सें० मी० काट लेते हैं।

चरण 4 : अब B से होकर, हम BL ∥ AD खींचते हैं।

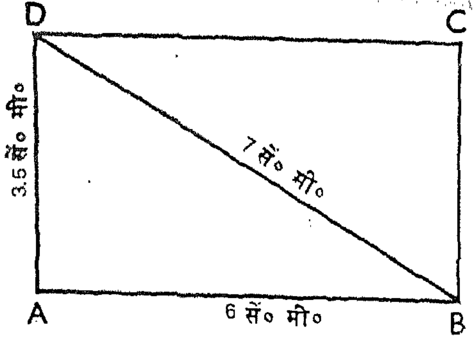
चरण 5 : D से होकर, हम BL से C पर मिलती हुई DC ∥ AB खींचते हैं।

तब, ABCD वाँछित समांतर चतुर्भुज है।

[हम एक वर्ग की रचना भी जबकि उसकी एक भुजा दी हुई हो इन्हीं चरणों में यह याद रखते हुए करते हैं कि वर्ग में प्रत्येक कोण 90° का होता है। (क्यों ?)]

16.4.2 समांतर चतुर्भुज की रचना करना जबकि दो आसन्न भुजाएँ और एक विकर्ण दिया हुआ है

मान लीजिए हमें एक समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना करनी है जिसमें AB=6 सें० मी०, AD=3.5 सें० मी० तथा BD=7 सें० मी० है। (देखिए आकृति 16.11)



आकृति 16.11

आपको याद होगा कि एक समांतर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं के युग्म समान होते हैं। इस प्रकार, वाँछित समांतर चतुर्भुज ABCD में,

CD=AB=6 सें० मी०, और

BC=AD=3.5 सें० मी०

अत: वाँछित समांतर चतुर्भुज की रचना करने के लिए हमें दो त्रिभुजों, अर्थात् △ABD (जिसमें AB=6 सें० मी०, BD=7 सें० मी० और DA=3.5 सें० मी० है) तथा △CDB (जिसमें CD=6 सें० मी०, DB=7 सें० मी० और BC=3.5 सें० मी० है) की इस प्रकार रचना करने की आवश्यकता है कि A और C, BD के विपरीत ओर स्थित हों।

हम यह पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ रहे हैं कि वह उपर्युक्त रचना करे।

टिप्पणी : परन्तु यदि आसन्न भुजाएँ AB और AD तथा विकर्ण AC दिए हों तो पहले की तरह हमें CD और BC की लम्बाइयाँ ज्ञात हो जाएँगी। तब समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना करने के लिए हमें दो त्रिभुजों ABC और ACD की रचना करनी पड़ेगी जिनकी भजाएँ हमें ज्ञात हैं।

प्रश्नावली 16.2

1. समांतर चतुर्भज ABCD की रचना कीजिए जबकि दिया है कि
   (i) AB=4.5 सें० मी०, AD=3.3 सें० मी०, $\angle A=59^\circ$
   (ii) AB=3.7 सें० मी०, BC=3.1 सें० मी०, $\angle B=105^\circ$
   (iii) AB=6.1 सें० मी०, AD=3.5 सें० मी०, BD=5.2 सें० मी०
   (iv) AB=4.3 सें० मी०, AD=2.9 सें० मी०, AC=5.5 सें० मी०
2. एक समांतर चतुर्भज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB=5 सें० मी०, AD=3 सें० मी० और $\angle A=30^\circ$ है। दोनों शीर्षलम्ब खींचिए और उनकी लम्बाइयाँ मापिए।
3. एक वर्ग की रचना कीजिए जबकि दिया है कि उसकी एक भुजा निम्न है :
   (i) 4 सें० मी०
   (ii) 7 सें० मी०

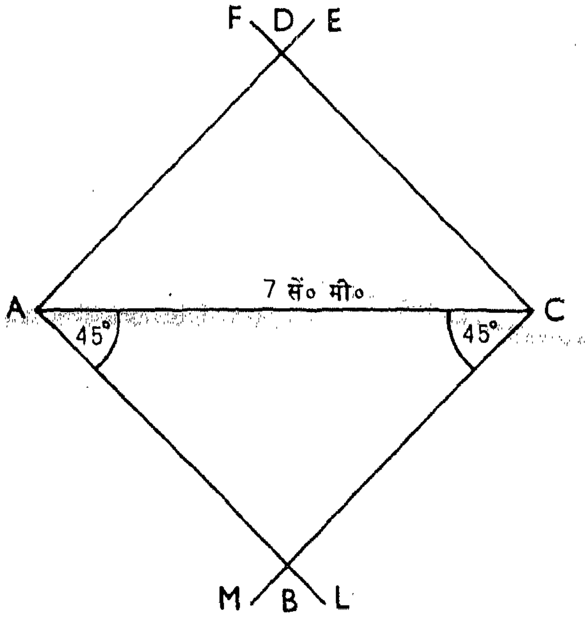
   प्रत्येक स्थिति में, उनके विकर्णों की लम्बाइयाँ मापिए। क्या वे समान हैं?

4. एक आयत की रचना कीजिए जिसकी दो आसन्न भुजाएँ 5 सें० मी० और 3.5 सें० मी० हैं। दोनों विकर्णों की लम्बाइयाँ मापिए। क्या ये समान हैं ?
5. एक आयत की रचना कीजिए जिसकी लम्बाई 10 सें० मी० तथा चौड़ाई 7.5 सें० मी० है। दोनों विकर्णों की लम्बाइयाँ मापिए।
6. एक आयत की रचना कीजिए जिसकी एक भुजा 3 सें० मी० तथा एक विकर्ण 5 सें० मी० है। आसन्न भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

16.5 वर्गों की रचना

16.5.1 वर्ग की रचना करना जबकि एक विकर्ण दिया हुआ है

मान लीजिए हमें एक वर्ग की रचना करनी है जिसका एक विकर्ण 7 सें० मी० है।



आकृति 16.12

हम वाँछित वर्ग की रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : हम एक रेखाखंड AC=7 सें० मी० की रचना करते हैं।

चरण 2 : A पर हम $\angle LAC = 45^\circ$ की रचना करते हैं।

चरण 3 : C पर हम $\angle MCA = 45^\circ$ की रचना करते हैं। मान लीजिए AL, CM को B पर काटता है। (देखिए आकृति 16.12)

चरण 4 : A से होकर हम एक रेखा AE ∥ BC खींचते हैं।

चरण 5 : C से होकर हम AE को D पर काटती हुई एक रेखा CF ∥ AB खींचते हैं।

तब, ABCD ही वाँछित वर्ग है।

प्रश्नावली 16.3

1. एक वर्ग की रचना कीजिए जबकि दिया हुआ है कि उसका एक विकर्ण
   (i) 5 सें० मी० है
   (ii) 8 सें० मी० है

   प्रत्येक स्थिति में उनकी भुजाओं की लम्बाइयाँ मापिए और जाँच कीजिए कि वे समान हैं।

16.6 समचतुर्भुजों की रचना

16.6.1 समचतुर्भुज की रचना करना जबकि एक भुजा और एक कोण दिया हुआ है

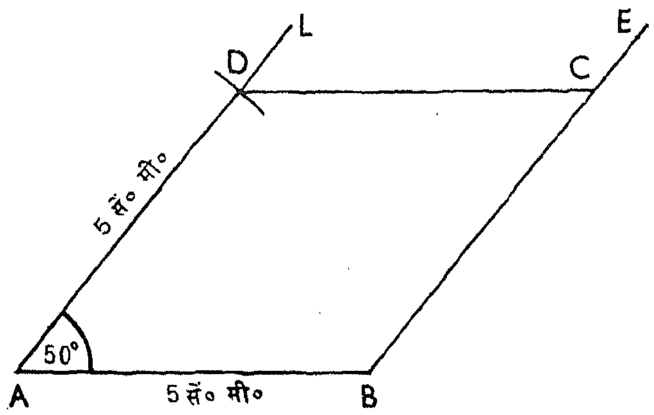
मान लीजिए हमें एक समचतुर्भुज की रचना करनी है जिसकी एक भुजा 5 सें० मी० है और एक कोण 50° है।

हम वाँछित समचतुर्भुज की रचना निम्न चरणों में करते हैं:

चरण 1 : हम एक रेखाखंड AB=5 सें० मी० खींचते हैं।

चरण 2 : A पर हम $\angle BAL = 50^\circ$ की रचना करते हैं।

चरण 3 : AL में से हम AD=5 सें० मी० काटते हैं। (देखिए आकृति 16.13)



आकृति 16.13

चरण 4 : B से होकर हम BE ∥ AD खींचते हैं।

चरण 5 : D से होकर हम BE को C पर काटती हुई DC ∥ AB खींचते हैं।

तब, ABCD वाँछित समचतुर्भुज है।

16.6.2 समचतुर्भुज की रचना करना जबकि एक भुजा और एक विकर्ण दिया हुआ है

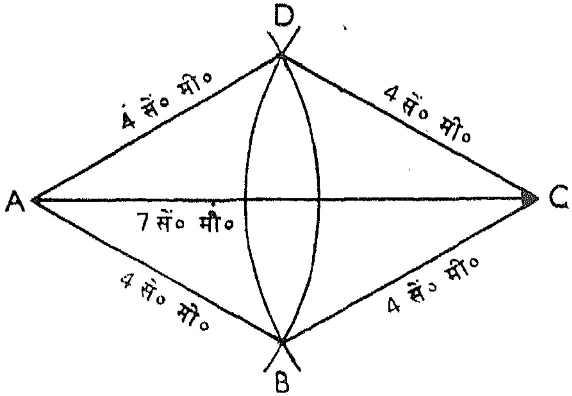
मान लीजिए हमें एक समचतुर्भुज की रचना करनी है जिसकी एक भुजा 4 सें० मी० है तथा एक विकर्ण 7 सें० मी० है।

हम वाँछित समचतुर्भुज की रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : हम एक रेखाखंड AC=7 सें० मी० की रचना करते हैं।

चरण 2 : A को केन्द्र मानकर और 4 सें० मी० की त्रिज्या लेकर हम AC के दोनों ओर विस्तृत एक चाप लगाते हैं।

चरण 3 : C को केन्द्र मानकर और वही त्रिज्या लेकर जो चरण 2 में ली है हम AC के दोनों ओर विस्तृत पहले चाप को B और D पर काटता हुआ एक चाप खींचते हैं। (देखिए आकृति 16.14)



आकृति 16.14

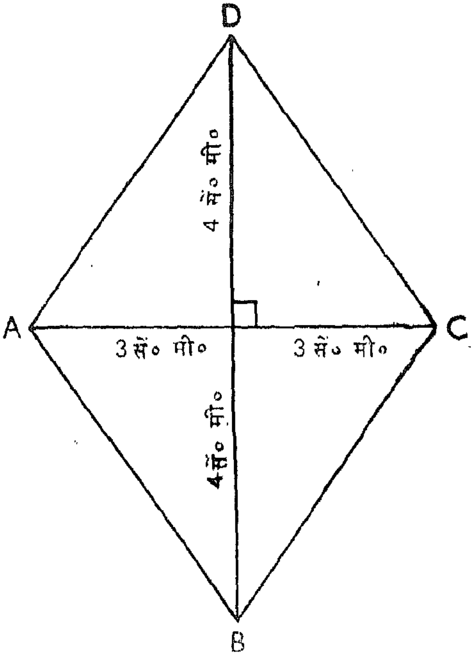
चरण 4 : हम A और B, B और C, C और D तथा अंत में D और A को मिलाते हैं।

तब, ABCD वाँछित समचतुर्भुज है।

प्रश्नावली 16.4

1. एक समचतुर्भुज की रचना कीजिए जबकि दिया है कि
   (i) एक भुजा 4 सें० मी० है तथा एक कोण 80° है।
   (ii) एक विकर्ण 6 सें० मी० है तथा एक भुजा 4 सें० मी० है।
   (iii) दोनों विकर्ण क्रमशः 8 सें० मी० और 6 सें० मी० हैं।

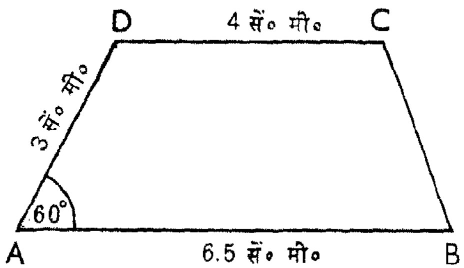
[**संकेत** : (iii) की स्थिति के लिए आपको याद होगा कि समचतुर्भुज के दोनों विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। क्या आकृति 16.15 से रचना के लिए कुछ सुझाव मिलता है ?]



आकृति 16.15

16.7 समलंबों की रचना

मान लीजिए हमें एक समलंब ABCD की रचना करनी है जिसमें AB ∥ CD, AB = 6.5 सें० मी०, AD = 3 सें० मी०, DC = 4 सें० मी० तथा $\angle A = 60°$ है। (देखिए आकृति 16.16)



आकृति 16.16

क्या आप आकृति से रचना के चरण देख रहे हैं ? हम यह रचना पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ रहे हैं ।

प्रश्नावली 16.5

1. एक समलम्ब ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB ∥ CD, AB=7 सें॰ मी॰, BC=4 सें॰ मी॰, CD=5 सें॰ मी॰ और $\angle B=50^\circ$ है ।

मुख्य संकल्पनाएँ

दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी	समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं
समांनर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते हैं और सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं	समांतर चतुर्भुजों वर्गों आयतों समचतुर्भुजों समलंबों } की रचना
समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों मे विभाजित करता है	

एकक XVII

क्षेत्रफल

इस एकक में हम 'क्षेत्रफल' (area) के बारे में अध्ययन करेंगे। हम यह भी सीखेंगे कि कुछ सरल ज्यामितीय आकृतियों जैसे कि आयतों, समांतर चतुर्भुजों, त्रिभुजों, इत्यादि के क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं।

17.1 भूमिका

हम सभी बड़े और छोटे कमरों, बड़े और छोटे खेतों, इत्यादि की बात करते हैं। ऐसे कथनों से हमारा क्या तात्पर्य होता है ? जब हम ऐसे कथन देते हैं तो हम कमरे या खेत के कौन-से गुण के बारे में सोचते हैं ? क्या हम सोचते हैं कि भूमि का कितना भाग प्रत्येक ने घेरा हुआ है ? हाँ। हम कमरों के फर्शों (floors) या खेतों द्वारा तल के घेरे हुए 'भागों' की तुलना कर रहे हैं। हम इन तुलनाओं को **क्षेत्रफलों** की तुलनाएँ कहते हैं।

यहाँ हम **क्षेत्रफल** की संकल्पना की कोई औपचारिक परिभाषा देने का प्रयत्न नहीं करेंगे। इसके स्थान पर हम अपने सहज ज्ञान का सहारा लेंगे और **किसी ज्यामितीय आकृति द्वारा तल के घेरे हुए भाग को क्षेत्रफल** के अर्थ में लेंगे। यह कि समतल ज्यामितीय आकृतियों जैसे कि आयतों, समांतर चतुर्भुजों, त्रिभुजों, इत्यादि के क्षेत्रफल होते हैं सहज ज्ञान से स्पष्ट है।

कमरों और खेतों को केवल देखकर ही सदैव यह बताना संभव नहीं होता कि कौन 'बड़ा' है और कौन 'छोटा' है। यदि यह हम कर भी लें तो भी हम इस स्थिति में नहीं होते कि यह निर्णय ले सकें कि "एक, दूसरे से कितना 'बड़ा'

या 'छोटा' है।" ऐसे प्रश्न भूमि खरीदने, मकान बनाने, इत्यादि में प्रायः हमारे सम्मुख आते हैं।

रेखाखंडों, कोणों, इत्यादि की तुलनाओं की तरह क्षेत्रफलों की तुलना के लिए भी हमें **मापन के मात्रक (unit of measurement)** की आवश्यकता है।

17.2 क्षेत्रफल के मात्रक

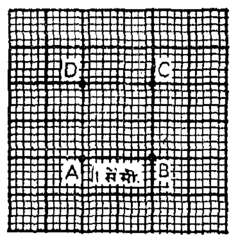
हम **एक वर्ग के क्षेत्रफल, जिसकी भुजा मात्रक लम्बाई की है, को क्षेत्रफलों को मापने के लिए मात्रक लेते हैं।** उदाहरणार्थ, यदि यह मात्रक 1 सें० मी० की भुजा का वर्ग है (देखिए आकृति 17.1) तो मात्रक क्षेत्रफल 1 वर्ग सें० मी० होता है। यदि यह मात्रक 1 वर्ग मी० की भुजा का वर्ग है तो मात्रक क्षेत्रफल 1 वर्ग मी० है।



आकृति 17.1

इनके अतिरिक्त अन्य मात्रक भी हैं। यदि हम अति छोटे क्षेत्रफलों को माप रहे हों तो हम 1 वर्ग मि० मी० को मात्रक के रूप में प्रयोग करते हैं। अति बड़े क्षेत्रफलों के लिए हम 1 वर्ग कि० मी० को मात्रक के रूप में प्रयोग करते हैं।

एक वर्ग सेंटीमीटर में कितने वर्ग मिलीमीटर हैं? एक आलेख कागज़ (graph paper) लीजिए जो कि सेंटीमीटरों और मिलीमीटरों में विभाजित हो। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि कुछ रेखाएँ गहरे रंग में (या मोटी) खींची गई हैं जो कि एक दूसरे से 1 सें० मी० की दूरियों पर हैं, जबकि शेष रेखाएँ हल्के रंग में (या पतली) खींची गई हैं जो कि एक दूसरे से तथा सेंटीमीटर वाली रेखाओं से 1 मि० मी० की दूरियों पर हैं। आकृति 17.2 में ABCD, 1 सें० मी की भुजा का एक वर्ग है। अर्थात् ABCD का क्षेत्रफल 1 वर्ग सें० मी० है। छोटे वर्गों के क्षेत्रफलों के बारे में आप क्या सोचते हैं? इनमें से प्रत्येक 1 मि० मी० भुजा का है और इसलिए छोटे वर्गों में से प्रत्येक का क्षेत्रफल 1 वर्ग मि० मी० है। एक सेंटीमीटर वर्ग में कितने मिलीमीटर वर्ग हैं? दूसरे शब्दों में, वर्ग ABCD में कितने छोटे वर्ग हैं? आइए



आकृति 17.2

गिनें। वर्ग ABCD में छोटे वर्गों की संख्या 100 है। इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

1 वर्ग सें० मी०=100 वर्ग मि० मी०=10^2 वर्ग मि० मी०

अन्यथा सभी छोटे वर्गों की गिनती किए बिना हम इसे दूसरे प्रकार से भी कर सकते थे। उपर्युक्त आकृति में ABCD की भुजाओं AB और AD में से प्रत्येक 10 समान भागों में विभाजित है तथा सम्पूर्ण वर्ग 10×10=100 वर्गों में विभाजित है जिनमें से प्रत्येक की भुजा 1 सेंटीमीटर का एक दशांश (tenth) अर्थात् 1 मिलीमीटर है।

चूँकि 1 मीटर=100 सेंटीमीटर, अत: इसी प्रकार हम ज्ञात कर सकते हैं कि

1 वर्ग मी०=100×100 वर्ग सें०मी०=10000 वर्ग सें०मी०=10^4 वर्ग सें०मी०

और इसी प्रकार

1 वर्ग कि०मी०=1000×1000 वर्ग मी०=1000000 वर्ग मी०=10^6 वर्ग मी०

क्या आप जानते हैं कि हमारे देश का क्षेत्रफल लगभग 3288000 वर्ग किलोमीटर है?

बड़े भूखंडों के क्षेत्रफल मापने के लिए प्राय: हम मापन के मात्रक के रूप में **हैक्टेयर** (**hectare**) का प्रयोग करते हैं। एक हैक्टेयर 100 मी०×100 मी० के वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर होता है। बड़े-बड़े भूखंडों के क्षेत्रफलों के मापने के अन्य मात्रक **सेंटीएयर** (**centiare**) और **एयर** (**are**) है। इन मात्रकों को एक दूसरे में निम्न प्रकार परिवर्तित किया जाता है:

1 हैक्टेयर=10000 वर्ग मी०=10^4 वर्ग मी०=100 एयर

1 एयर=100 वर्ग मी०=10^2 वर्ग मी०=100 सेंटीएयर

1 सेंटीएयर=1 वर्ग मी०

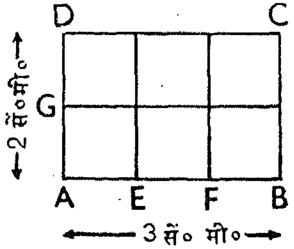
ये मात्रक क्षेत्रफल मापन के **मैट्रिक** (**metric**) मात्रक हैं।

17.3 कुछ ऋजुरेखीय आकृतियों के क्षेत्रफल

अब हम सीखेंगे कि कुछ ऋजुरेखीय आकृतियों (rectilinear figures) जैसे कि आयतों, वर्गों, इत्यादि के क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं।

17.3.1 आयत का क्षेत्रफल

आइए एक आयत ABCD पर विचार करें जिसकी लम्बाई, उदाहरणार्थ, 3 सें०मी० है तथा चौड़ाई, उदाहरणार्थ, 2 सें०मी० है।



आकृति 17.3

हम आयत ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहते हैं।

आइए AB को 1 सें० मी० लम्बाइयों वाले तीन समान भागों, उदाहरणार्थ, AE, EF और FB में विभाजित करें। साथ ही, आइए AD को 1 सें० मी० लम्बाइयों वाले दो समान भागों, उदाहरणार्थ, AG और GD में विभाजित करें। (देखिए आकृति 17.3)

अंत में, आइए E और F से होकर AD के समांतर रेखाएँ खींचें तथा G से होकर AB के समांतर एक रेखा खींचें। हम क्या देखते हैं ? हम देखते हैं कि आयत ABCD, $6(=3\times2)$ वर्गों में विभाजित हो गया है जिनमें से प्रत्येक की भुजा 1 सें० मी० है।

अतः आयत ABCD का क्षेत्रफल 3×2 $(=6)$वर्ग सें० मी० है।

एक अन्य आयत लेकर जिसकी लम्बाई, उदाहरणार्थ, 5 सें० मी० और चौड़ाई, उदाहरणार्थ, 3 सें० मी० है, आइए इस प्रयोग को दोहराएँ। हम देखते हैं कि इस आयत का क्षेत्रफल **$5\times3(=15)$ वर्ग सें० मी० है।**

ध्यान दीजिए कि **यदि हम l सें० मी० लम्बाई और b सें० मी० चौड़ाई का एक आयत लेते हैं, तो उस आयत का क्षेत्रफल $l\times b$ वर्ग सें० मी० है।** अतः हम कहते हैं कि **एक आयत का क्षेत्रफल* A,**

$$A=l\times b \text{ वर्ग मात्रक}$$

होता है, जहाँ l मात्रक और b मात्रक क्रमशः आयत की लम्बाई और चौड़ाई हैं।

टिप्पणी 1 : आयत की लम्बाई और चौड़ाई एक ही मात्रकों में होनी चाहिए। इस प्रकार, यदि लम्बाई सेंटीमीटरों में है तो चौड़ाई भी सेंटीमीटरों में ही होनी चाहिए। तब क्षेत्रफल वर्ग सेंटीमीटरों में होगा।

टिप्पणी 2 : आपको याद होगा कि वर्ग एक विशेष प्रकार का आयत होता है जिसकी लम्बाई और चौड़ाई समान होती हैं।

अतः **भुजा l मात्रक वाले एक वर्ग का क्षेत्रफल A** निम्न होगा :

$$A=l\times l \text{ वर्ग मात्रक}=l^2 \text{ वर्ग मात्रक}$$

हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : एक आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल 126 वर्ग मीटर है तथा चौड़ाई 7 मीटर है। उसकी लम्बाई निर्धारित कीजिए।

---

* यह सूत्र उस स्थिति में भी सत्य है जब कि l और b पूर्ण संख्याओं के अतिरिक्त अन्य संख्याएँ हैं।

हल : आइए लम्बाई को l से व्यक्त करें। तब,

$$l \times 7 = 126$$

$$\text{अतः, } l = 18$$

दूसरे शब्दों में, भूखंड की लम्बाई 18 मीटर है।

उदाहरण 2 : उस आयताकार खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई 100.8 मीटर तथा चौड़ाई 42.5 मीटर है।

हल : हमें दिया हुआ है कि,

लम्बाई $l = 100.8$ मी०

तथा चौड़ाई $b = 42.5$ मी०

इस प्रकार, $A = (100.8 \times 42.5)$ वर्ग मी० $= 4284$ वर्ग मी०

उदाहरण 3 : 12 मी० × 8 मी० वाले एक कमरे में 30.00 रु० प्रति वर्ग मी० की दर से दरी बिछाई जानी है। कुल व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : क्षेत्रफल $= (12 \times 8)$ वर्ग मी० $= 96$ वर्ग मी०

दरी बिछाने का व्यय 30.00 रु० प्रति वर्ग मीटर है और हमें कमरे के फर्श का क्षेत्रफल ज्ञात है।

अतः दरी बिछाने का व्यय 96×30 अर्थात् 2880.00 रु० है।

प्रश्नावली 17.1

1. एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि दिया है कि

(i) लम्बाई = 4.9 सें० मी०, चौड़ाई = 3.4 सें० मी०

(ii) लम्बाई = 5.5 सें० मी०, चौड़ाई = 44 मि० मी०

(iii) लम्बाई = 4 मी०, चौड़ाई = 3.1 मी०

(iv) लम्बाई = 4.5 मी०, चौड़ाई = 37 सें० मी०

अपने उत्तर को वर्ग सें० मी० के पदों में व्यक्त कीजिए।

2. उस वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा निम्न है :

(i) 4.3 सें० मी० (ii) 2.1 मी० (iii) 63 मि० मी० (iv) 5.7 सें० मी०

अपने उत्तर को वर्ग सेंटीमीटरों में व्यक्त कीजिए।

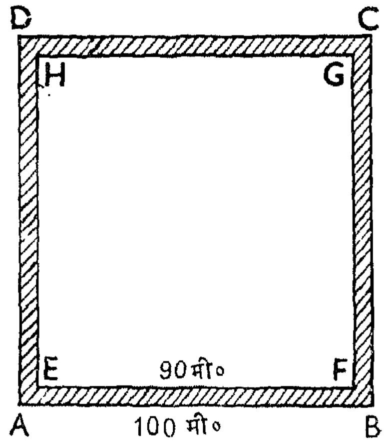
3. उस वर्ग की भुजा ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल निम्न है :

(i) 12.25 वर्ग सें० मी० (ii) 132.25 वर्ग मीटर

4. एक आयत का क्षेत्रफल 72 वर्ग सें० मी० है तथा लम्बाई 12 सें० मी० है। उसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

5. एक आयताकार खेत का क्षेत्रफल 1 हैक्टेयर है। उसकी अन्य भुजा क्या होगी यदि एक भुजा निम्न हो :
(i) 80 मी० (ii) 100 मी० (iii) 200 मी०
6. एक आयत की परिमाप 60 मी० है। उसकी लम्बाई, चौड़ाई से 2 मीटर अधिक है। उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. एक आयताकार खेत की लम्बाई, चौड़ाई की दुगुनी है और उसका क्षेत्रफल 2 हैक्टेयर है। खेत पर 5.00 रु० प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए।
8. 8 मी० $\times$ 6 मी० के एक फर्श को ढकने के लिए 20 सें० मी० $\times$ 15 सें० मी० की कितनी ईंटों की आवश्यकता होगी ?
9. एक किसान के खेत की माप 234 मी० $\times$ 154 मी० है। यदि 450.00 रु० प्रति हैक्टेयर की दर से भूमि राजस्व (land revenue) दिया जाता है तो ज्ञात कीजिए कि किसान को कितना राजस्व देना पड़ेगा।
10. एक खेत 360 मी० $\times$ 170 मी० का है। यदि प्रति हैक्टेयर 2 क्विंटल खाद डालनी पड़ती है तो 150.00 रु० प्रति क्विंटल की दर से खेत में खाद डलवाने का कुल व्यय ज्ञात कीजिए।
*11. एक वर्गाकार पार्क, जिसकी भुजा 100 मीटर है, के अन्दर चारों ओर 5 मीटर चौड़ा एक पथ है। पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

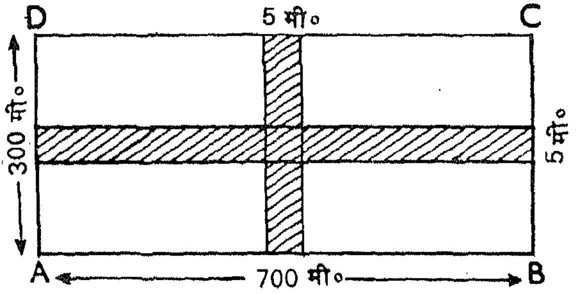
[**संकेत** : मान लीजिए ABCD एक पार्क है। तब AB=100 मीटर है। पथ को आकृति 17.4 में छायामय दिखाया गया है। तब पार्क का घास वाला भाग 90 मीटर की भुजा का वर्ग EFGH है। इस प्रकार, पथ का क्षेत्रफल=क्षेत्रफल ABCD—क्षेत्रफल EFGH]



आकृति 17.4

*12. एक आयताकार पार्क, जिसकी माप 125 मी० $\times$ 60 मी० है, के चारों ओर एक 4 मीटर चौड़ा पथ है। पथ पर 12.00 रु० प्रति वर्ग मीटर की दर से ईंटें लगवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

***13.** एक आयताकार पार्क, जिसकी लम्बाई 700 मीटर और चौड़ाई 300 मीटर है, के मध्य में परस्पर समकोण पर काटती हुई 5 मीटर चौड़ी दो सड़कें हैं। इनमें से एक सड़क लम्बाई के समांतर है तथा दूसरी चौड़ाई के समांतर है। 15.00 रु० प्रति वर्ग मीटर की दर से सड़कें बनवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।



आकृति 17.5

[**संकेत :** दोनों सड़कें 700 मी०×5 मी० तथा 300 मी०×5 मी० के दो आयत हैं। अतः सड़कों का कुल क्षेत्रफल $700\times5+300\times5-5\times5=4975$ वर्ग मीटर है। हमने 5×5 वर्ग मी० अर्थात् 5 मी०×5 मी० के वर्ग के क्षेत्रफल को क्यों घटाया है ?]

17.3.2 एक महत्वपूर्ण पर्यवेक्षण

इससे पहले कि हम समांतर चतुर्भुज, समलंब, इत्यादि का क्षेत्रफल ज्ञात करें, हम **सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफलों के बारे में एक महत्वपूर्ण पर्यवेक्षण करते हैं।**

आपको याद होगा कि दो (समतल) आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं यदि, यह मानते हुए कि वे गत्ते के टुकड़े हैं, उनमें से एक को उठाकर दूसरे पर इस प्रकार रखा जा सके कि वह दूसरे को पूर्णतया ढक ले, अर्थात् दूसरे के साथ संपाती हो जाए। दूसरे शब्दों में, सर्वांगसम आकृतियाँ सभी दृष्टिकोण से समान होती हैं। अतः यह सहज ज्ञान से स्पष्ट है कि **दो सर्वांगसम आकृतियाँ तल का समान भाग घेरती हैं।** हम कहते हैं कि **सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल समान होते हैं।**

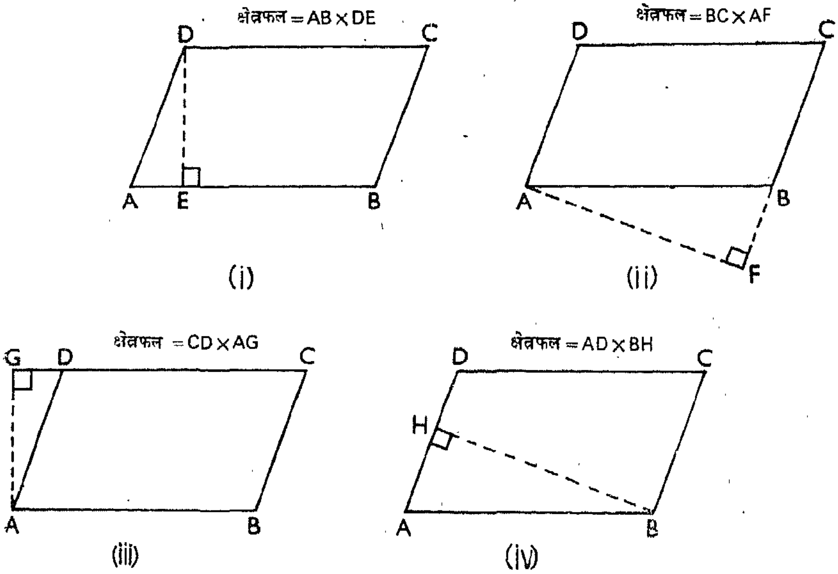
17.3.3 समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

हम बिना उपपत्ति दिए कह रहे हैं कि **एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसकी किसी एक भुजा तथा तदनुरूपी शीर्षलम्ब का गुणनफल होता है।** (देखिए आकृति 17.6)

यदि 'b' समांतर चतुर्भुज की एक भुजा है तथा h तदनुरूपी शीर्षलम्ब तो उसका क्षेत्रफल A निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$A = b \times h$$

[इस सूत्र की उपपत्ति परिशिष्ट II में दी गई है।]



आकृति 17.6

हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 100.8 वर्ग सेंटीमीटर है तथा उसकी एक भुजा की लम्बाई 12 सें०मी० है। तदनुरूपी शीर्षलम्ब ज्ञात कीजिए।

हल : आइए भुजा को 'b' तथा तदनुरूपी शीर्षलम्ब को 'h' से व्यक्त करें। तब,

$$b \times h = 100.8$$

हमें दिया है कि $b = 12$ सें० मी० है।

इस प्रकार, $$12 \times h = 100.8$$

जिससे $$h = \frac{100.8}{12} = 8.4$$

अतः तदनुरूपी शीर्षलम्ब 8.4 सेंटीमीटर है।

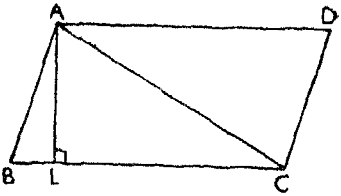
प्रश्नावली 17.2

1. उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके लिए एक भुजा की लम्बाई और तदनुरूपी शीर्षलम्ब क्रमशः निम्न हैं :
   (i) 7.8 सें० मी० और 4.9 सें० मी०
   (ii) 12.9 मी० और 6.3 मी०
   (iii) 65 मि० मी० और 35 मि० मी०
2. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसका एक शीर्षलम्ब 18 सें० मी० है, 396 वर्ग सें० मी० है। तदनुरूपी भुजा निर्धारित कीजिए।

17.3.4 त्रिभुज का क्षेत्रफल

त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिए नियम ज्ञात करने में हम अनुच्छेद 16.3.2 में सिद्ध किए गए गुण कि समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है का प्रयोग करते हैं। इनमें से प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल, समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के आधे के बराबर होता है।

मान लीजिए ABC कोई त्रिभुज है। A से होकर आइए AD ∥ BC और C से होकर CD ∥ AB खींचें। तब हमें एक समांतर चतुर्भुज ABCD प्राप्त हो जाता है जिसका एक विकर्ण AC है। (देखिए आकृति 17.7) अतः त्रिभुज ABC और CDA सर्वांगसम हैं। इसलिए प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज ABCD के क्षेत्रफल के आधे के समान है।



आकृति 17.7

अब आइए शीर्षलम्ब AL खींचें। तब,

$\triangle$ ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल)
$= \frac{1}{2}$ (समांतर चतुर्भुज का आधार $\times$ शीर्षलम्ब)
$= \frac{1}{2}\, BC \times AL$

हम देखते हैं कि BC और AL क्रमशः त्रिभुज के भी आधार और शीर्षलम्ब हैं। अतः

$\triangle$ ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ शीर्षलम्ब

अर्थात् त्रिभुज का क्षेत्रफल आधार और तदनुरूपी शीर्षलम्ब के गुणनफल के आधे के समान होता है।

जब त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है जिसका समकोण B पर है तो हम देखते हैं कि शीर्षलम्ब AL भुजा AB के साथ संपाती है। अतः एक समकोण त्रिभुज के लिए हमें निम्न नियम भी प्राप्त होता है :

समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल कर्ण के अतिरिक्त उसकी दो भुजाओं के गुणनफल के आधे के समान होता है।

प्रश्नावली 17.3

1. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि एक आधार और तदनुरूपी शीर्षलम्ब क्रमशः निम्न हैं :

(i) 16.7 सें० मी० और 10.9 सें० मी०

(ii) 55 मि० मी० और 34 मि० मी०

(iii) 3.5 मी० और 2.4 मी०

अपने उत्तर वर्ग सेंटीमीटरों में दीजिए।

2. समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाओं की लम्बाइयाँ (कर्ण के अतिरिक्त) निम्न हैं :

(i) 20.6 सें० मी० और 13.9 सें० मी०

(ii) 14.7 सें० मी० और 12.9 सें० मी

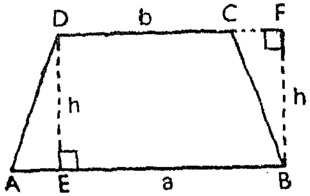
3. एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 60 वर्ग सें० मी० है तथा एक भुजा 12 सें० मी० है। दूसरी भुजा ज्ञात कीजिए।

4. एक समचतुर्भज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्णों की लम्बाइयाँ क्रमशः 20 स० मी० और 16 सें० मी० हैं।

[**संकेत** : याद कीजिए कि समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और इसलिए वे समचतुर्भुज को चार सर्वांगसम समकोण त्रिभुजों में विभाजित करते हैं। फिर यह सरलता से देखा जा सकता है कि **समचतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके विकर्णों के गुणनफल का आधा होता है।**]

17.3.5 समलंब का क्षेत्रफल

हम बिना उपपत्ति दिए कह रहे हैं कि एक समलंब का क्षेत्रफल उसकी समांतर भुजाओं की लम्बाइयों के औसत (average) और उनके बीच की दूरी का गुणनफल होता है। (देखिए आकृति 17.8) **यदि a और b समांतर भुजाओं की लम्बाइयाँ हैं तथा h उनके बीच की दूरी, तो समलंब का क्षेत्रफल A निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :**



आकृति 17.8

$$\mathbf{A=\tfrac{1}{2}(a+b)\times h}$$

[इस सूत्र की उपपत्ति परिशिष्ट III में दी गई है।]

हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : एक समलंब की समांतर भुजाओं की लम्बाइयाँ 12.5 सें० मी० और 9 सें० मी० हैं जबकि उनके बीच की दूरी 6 सें० मी० है। उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि,

$a=12.5,\ b=9$ तथा $h=6$ है।

अत: $A=\frac{1}{2}(12.5+9)\times 6$

$=(10.75)\times 6=64.5$

अर्थात् समलंब का क्षेत्रफल 64.5 वर्ग सेंटीमीटर है।

प्रश्नावली 17.4

1. एक समलंब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी समांतर भुजाएँ 15.9 सें० मी० और 5.1 सें० मी० हैं तथा उनके बीच की दूरी 12 सें० मी० है।

2. एक समलंब का क्षेत्रफल 34.5 वर्ग सें० मी० है। यदि उसकी समांतर भुजाओं के बीच की दूरी 3 सें० मी० है तथा इनमें से एक समांतर भुजा 15 सें० मी० है तो दूसरी की लम्बाई निर्धारित कीजिए।

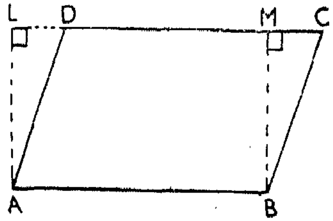
मुख्य संकल्पनाएँ

क्षेत्रफल	आयत	
क्षेत्रफल के मात्रक	वर्ग	
	समांतर चतुर्भुज	का क्षेत्रफल
सर्वांगसम आकृतियों	त्रिभुज	
के क्षेत्रफल	समलंब	

परिशिष्ट II

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

मान लीजिए ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। आइए CD पर A और B से क्रमश: AL और BM लम्ब खींचें। आपको याद होगा कि AL (या BM) समांतर चतुर्भुज की भुजा AB का तदनुरूपी शीर्षलम्ब है। (देखिए आकृति A II. 1) क्या आप भुजा BC के तदनुरूपी शीर्षलम्ब खींच सकते हैं ?



आकृति A II. 1

अब हम समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात करेंगे ? स्वयं आकृति से हमें एक संकेत मिल रहा है। ऐसा प्रतीत होता है कि त्रिभुज ALD और BMC सर्वांगसम हैं। क्या वे हैं ?

हम देखते हैं कि

$AL=BM$ (परिभाषा से)

$\angle L=\angle M=90^\circ$ (रचना से)

$AD=BC$ (क्यों ?)

इस प्रकार, **RHS सर्वांगसमता नियम** से दोनों त्रिभुज ALD और BMC सर्वांगसम हैं। इसके परिणामस्वरूप उनके क्षेत्रफल समान हैं।

अतः **समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल**

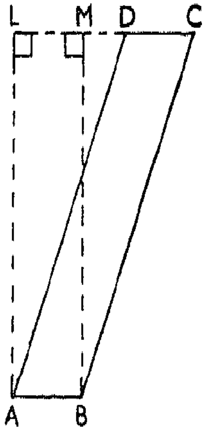
=चतुर्भुज ABMD का क्षेत्रफल + $\triangle$BMC का क्षेत्रफल

=चतुर्भुज ABMD का क्षेत्रफल + $\triangle$ALD का क्षेत्रफल (क्यों ?)

=आयत ABML का क्षेत्रफल

$=AB\times AL$

अतः **समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसकी एक भुजा तथा तदनुरूपी शीर्षलम्ब का गुणनफल होता है।**



आकृति A II.2

पाठक ध्यान दें कि उपर्युक्त उपपत्ति केवल तभी मान्य है जबकि शीर्षलम्बों में से एक समांतर चतुर्भुज के अन्दर हो जैसा कि आकृति A II. 1 में है। यदि दोनों ही शीर्षलम्ब पूर्णतया या आंशिक रूप से समांतर चतुर्भुज के बाहर हों, जैसे कि आकृति A II. 2 में AL और BM हैं, तो यह उपपत्ति मान्य नहीं है। हम यह पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ रहे हैं कि वह इस स्थिति की उपपत्ति प्रदान करे।

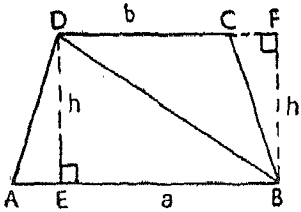
[**संकेत :** AD और BM के प्रतिच्छेद बिंदु को E से व्यक्त कीजिए। दिखाइए कि चतुर्भुज BEDC का क्षेत्रफल = चतुर्भुज AEML का क्षेत्रफल, इत्यादि।]

परिशिष्ट III

समलंब का क्षेत्रफल

मान लीजिए ABCD एक समलंब है जिसकी समांतर भुजाओं AB और CD की क्रमशः लम्बाइयाँ a और b हैं।

आइए $DE \perp AB$ तथा $BF \perp DC$ खींचें। तब, $DE = BF$ समलंब ABCD की समांतर भुजाओं AB और CD के बीच की दूरी है। आइए इस दूरी को h से व्यक्त करें। (देखिए आकृति A III.1)



आकृति A III. 1

अब हम समलंब ABCD का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे?

यह स्पष्ट है कि यदि हम विकर्ण AC या BD खींच लें तो समलंब दो त्रिभुजों में विभाजित हो जाता है। निस्संदेह, हम जानते हैं कि एक त्रिभुज का क्षेत्रफल किस प्रकार ज्ञात किया जाता है।

आइए इसका विकर्ण BD खींचें।

तब, $\triangle ABD$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} a \times h$

$\triangle BCD$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} b \times h$

अतः, **समलंब ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(a+b) \times h$**

शब्दों में, **समलंब का क्षेत्रफल* उसकी समांतर भुजाओं की लम्बाइयों के औसत और उनके बीच की दूरी का गुणनफल होता है।**

---

* ध्यान दीजिए कि $\frac{1}{2}(a+b)$, a और b का **औसत** है।

एकक XVIII

वृत्त

हम वृत्तों से पहले से ही परिचित हैं। इस एकक में हम वृत्तों के कुछ और गुणों का अध्ययन करेंगे।

18.1 पुनरावलोकन

आप वृत्तों और उनके कुछ गुणों से पहले ही परिचित हैं। आपको अपनी पिछली कक्षाओं से निम्न संकल्पनाओं का पुनरावलोकन करना चाहिए :

वृत्त : वृत्त की त्रिज्या, केन्द्र, व्यास और परिधि।

चाप और जीवाएँ : दीर्घचाप, लघुचाप, अर्धवृत्त, केन्द्र पर बनाया गया कोण।

वृत्त का अभ्यंतर और बहिर्भाग।

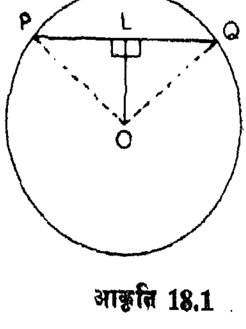
वृत्त-खंड (segment of a circle) और त्रिज्यखंड (sector)।

अब हम वृत्तों के कुछ और गुणों का अध्ययन करते हैं।

18.2 केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब

आइए एक वृत्त लें जिसका केन्द्र, उदाहरणार्थ, O है और उसकी कोई जीवा PQ खींचें। फिर $OL \perp PQ$ की रचना करें। (देखिए आकृति 18.1)

अब आइए PL और QL को मापें। हम क्या देखते हैं ? हम देखते हैं कि $PL = QL$ है।



आकृति 18.1

दूसरे शब्दों में, **वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।** यह पर्यवेक्षण अति सरलता से सिद्ध किया जा सकता है। आइए देखें कैसे।

हम O और P तथा O और Q को मिलाते हैं। इस प्रकार, हम दो समकोण त्रिभुज OLP और OLQ प्राप्त करते हैं। इनमें से प्रत्येक का समकोण L पर है। (क्यों ?)

हम देखते हैं कि इन दोनों समकोण त्रिभुजों में,

कर्ण OP=कर्ण OQ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

भुजा OL=भुजा OL

अतः RHS सर्वांगसमता नियम से,

$$\triangle OLP \cong \triangle OLQ$$

इससे निष्कर्ष निकलता है कि,

$$PL = QL$$

निस्संदेह यही हम सिद्ध करना चाहते थे।

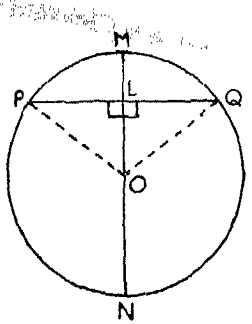
[**टिप्पणी :** चूँकि $OL \perp PQ$ है तथा OL, PQ को समद्विभाजित करता है, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि, **OL, PQ का लम्ब समद्विभाजक है और** इसीलिए **बिंदुओं P और Q** की सममिति अक्ष है।]

अब आइए उपर्युक्त कथन के विलोम, अर्थात् **वृत्त की जीवा का लम्ब समद्विभाजक उसके केन्द्र से होकर जाता है,** की जाँच करें।

क्या विलोम सत्य है ? आइए देखें।

मान लीजिए PQ एक वृत्त की जीवा है जिसका केन्द्र O है तथा MN इस जीवा का लम्ब समद्विभाजक है। (देखिए आकृति 18.2)

एकक XII से आपको याद होगा कि **दो दिए हुए बिन्दुओं की सममिति अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु उन दोनों बिन्दुओं से समदूरस्थ होता है तथा दो बिन्दुओं से समदूरस्थ प्रत्येक बिन्दु उनकी सममिति अक्ष पर स्थित होता है।**



आकृति 18.2

अतः आइए O और P तथा O और Q को मिलाएँ।

अब, OP=OQ (क्यों ?)

इसका अर्थ यह हुआ कि केन्द्र O, P और Q से समदूरस्थ है।

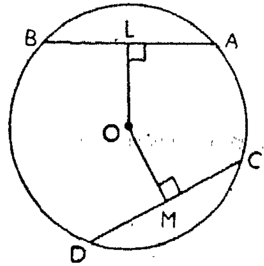
अतः केन्द्र O को बिंदुओं P और Q की सममिति अक्ष पर अवश्य स्थित होना चाहिए जो यह कहने के समान है कि उसे जीवा PQ के लम्ब समद्विभाजक पर अवश्य ही स्थित होना चाहिए।

अतः **जीवा PQ का लम्ब समद्विभाजक वृत्त के केन्द्र O से होकर जाता** है। इससे परिणाम सिद्ध हो जाता है।

18.3 वृत्त की समदूरस्थ जीवाएँ

मान लीजिए कि AB और CD एक वृत्त की जीवाएँ हैं जिसका केन्द्र O है। आइए OL ⊥ AB तथा OM ⊥ CD की रचना करें। (देखिए आकृति 18.3)

यदि OL=OM हो, तो हम कहते हैं कि **जीवाएँ AB और CD केन्द्र से समदूरस्थ** हैं। संक्षेप में हम कहते हैं कि **ये समदूरस्थ जीवाएँ हैं**।



आकृति 18.3

अब हम समदूरस्थ जीवाओं के एक अति महत्वपूर्ण गुण, अर्थात् यह कि **वृत्त की समदूरस्थ जीवाएँ समान होती हैं**, को सिद्ध करते हैं। उपपत्ति अति सरल है और इसमें RHS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग होता है।

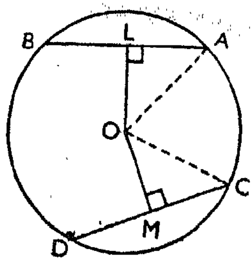
आकृति 18.3 में आइए O और A तथा O और C को मिलाएँ। (देखिए आकृति 18.4) हमें दो समकोण त्रिभुज OLA और OMC प्राप्त होते हैं। (क्यों ?)

इन त्रिभुजों में हम देखते हैं कि

भुजा OL = भुजा OM

तथा कर्ण OA = कर्ण OC

(एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)



आकृति 18.4

अतः RHS सर्वांगसमता नियम से,

$$\triangle OLA \cong \triangle OMC$$

अतः, $AL = CM$ (क्यों ?)

परन्तु आपको याद होगा कि वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।

अतः, $AL = \frac{1}{2} AB$ तथा $CM = \frac{1}{2} CD$

जिससे, $AB = CD$

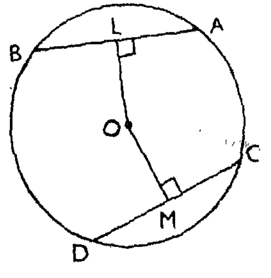
अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि **वृत्त की समदूरस्थ जीवाएँ समान होती हैं।**

आइए इसके विलोम की जाँच करें। क्या **वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से समदूरस्थ होती हैं।**

आइए केन्द्र O लेकर एक वृत्त खींचें और उसकी दो समान जीवाओं AB और CD की रचना करें। [हम समान जीवाओं की रचना किस प्रकार करेंगे ? हम पहले कोई जीवा AB खींचते हैं। फिर हम वृत्त पर कोई बिन्दु C लेते हैं। C को केन्द्र मानकर और AB त्रिज्या लेकर हम वृत्त को D पर काटता हुआ एक चाप खींचते हैं। तब, जीवा CD, जीवा AB के समान है।]

O से दोनों जीवाओं पर हम लम्ब OL और OM खींचते हैं। (देखिए आकृति 18.5) OL और OM को मापिए। हम क्या देखते हैं ?

वृत्त में समान जीवाओं के कुछ और युग्म खींचकर आइए इस प्रयोग को दोहराएँ। हम देखेंगे कि **वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र से समदूरस्थ होती हैं।**



आकृति 18.5

18.4 अर्धवृत्त का कोण

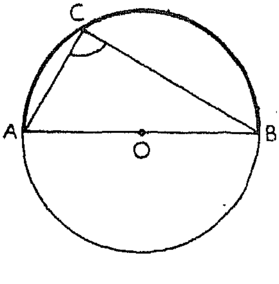
आइए केन्द्र O लेकर एक वृत्त खींचें और उसका एक व्यास, उदाहरणार्थ AB, खींचें।

फिर, आइए वृत्त पर कोई बिन्दु C लें। हम देखते हैं कि चाप ACB एक **अर्धवृत्त (semicircle)** है। अन्त में, A और C तथा B और C को मिलाएँ। (देखिए आकृति 18.6)

∠ACB अर्धवृत्त का एक कोण कहलाता है।

यह देखा जा सकता है कि ∠ACB सदैव 90° रहता है।

आइए ∠ACB को मापें। हम क्या देखते हैं ?



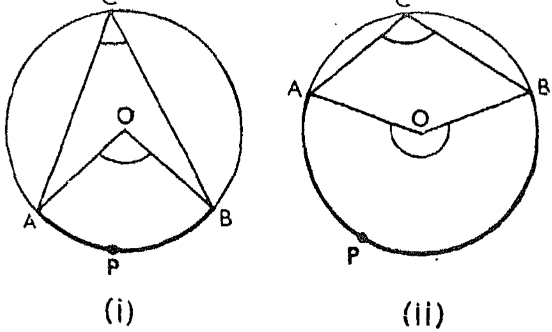
आकृति 18.6

अब वृत्त पर C को किसी अन्य बिन्दु पर लें। पुनः आइए ∠ACB को मापें। हम देखते हैं कि वृत्त पर C की प्रत्येक स्थिति के लिए ∠ACB एक समकोण है।

आइए अनेक भिन्न वृत्तों को खींचकर इस प्रयोग को दोहराएँ। हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में **अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।**

18.5 वृत्त के केन्द्र पर किसी चाप द्वारा बनाया गया कोण

आइए केन्द्र O लेकर एक वृत्त खींचें और उसका एक चाप APB लें जैसा कि आकृति 18.7 में दिखाया गया है। [आकृति 18.7 (i) में APB एक लघु चाप (minor arc) है जबकि आकृति 18.7 (ii) में APB एक दीर्घ चाप (major arc) है।]



आकृति 18.7

आइए वृत्त के शेष भाग पर कोई बिन्दु C लें। अंत में, O और A, O और B, C और A तथा C और B को मिलाएँ।

$\angle AOB$ एक **केन्द्रीय कोण (central angle)** कहलाता है क्योंकि यह चाप APB द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण है। [हम देखते हैं कि आकृति 18.7 (ii) के लिए, अर्थात् जब चाप APB एक दीर्घ चाप है, केन्द्रीय कोण AOB प्रतिवर्ती है।]

आइए अब $\angle AOB$ और $\angle ACB$ को मापें। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि $\angle AOB = 2 \angle ACB$

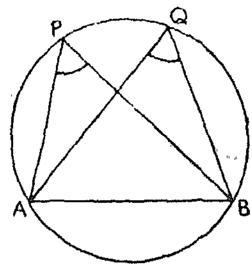
आइए अनेक भिन्न वृत्तों को खींचकर इस प्रयोग को दोहराएँ। हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में **वृत्त के चाप द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिन्दु पर बनाए गए कोण का दुगुना होता है।**

18.6 एक ही वृत्त-खंड के कोण

आइए एक वृत्त लें और उसकी एक जीवा AB खींचें। अब वृत्त पर दो बिन्दु P और Q इस प्रकार लें कि वे AB के एक ही ओर स्थित हों। (देखिए आकृति 18.8)

हम कहते हैं कि **$\angle APB$ और $\angle AQB$ एक ही वृत्त-खंड के कोण हैं।**

आइए $\angle APB$ और $\angle AQB$ को मापें। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि $\angle APB = \angle AQB$ है।



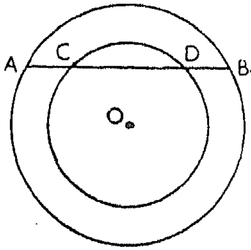
आकृति 18.8

वृत्त पर P और Q की ऐसी अन्य स्थितियाँ लेकर आइए इस प्रयोग को दोहराएँ। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि, प्रत्येक स्थिति में, **एक ही वृत्त-खंड के कोण समान होते हैं।**

प्रश्नावली 18.1

1. बिन्दु O को केन्द्र मानकर 2.5 सें० मी० की त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसमें एक जीवा AB=4 सें० मी० खींचिए। साथ ही, OM⊥AB इस प्रकार खींचिए कि M, AB पर स्थित हो। AM और MB को मापिए। क्या AM=MB है ?

2. **एक ही केन्द्र वाले वृत्त संकेन्द्रीय वृत्त** (concentric circles) **कहलाते हैं।** O को केन्द्र मानकर और क्रमश: 1.5 सें० मी० और 2.2 सें० मी० त्रिज्याओं वाले दो संकेन्द्रीय वृत्त खींचिए। बाहरी वृत्त की एक जीवा AB खींचिए जो कि अन्दर वाले वृत्त को C और D पर काटती है। (देखिए आकृति 18.9) क्या AB और CD का एक ही मध्य-बिन्दु है ? क्या AC=DB है ?
[**संकेत :** OM⊥AB खींचिए।]



आकृति 18.9

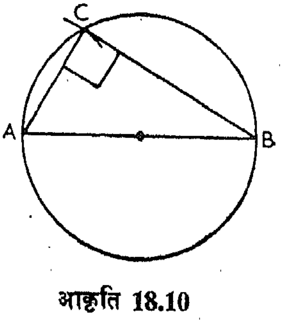
3. AB=6.4 सें० मी० का व्यास लेकर एक वृत्त खींचिए। वृत्त पर कोई बिन्दु C लीजिए। AC और BC को मिलाइए। ∠ACB को मापिए। क्या ∠ACB एक समकोण है ?

4. हम नीचे **समकोण त्रिभुज की रचना करने की एक वैकल्पिक विधि** दे रहे हैं, **जबकि उसका कर्ण और एक भुजा दिए हुए हों।** [अनुच्छेद 14.8 भी देखिए।] हम इस गुण का प्रयोग करेंगे कि **अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।**]

चरण 1 : हम दिए हुए कर्ण के बराबर की लम्बाई का एक रेखाखंड AB खींचते हैं।

चरण 2 : AB को व्यास मानकर हम एक वृत्त खींचते हैं।

चरण 3 : A को केन्द्र मानकर और दी हुई भुजा की लम्बाई के बराबर की त्रिज्या लेकर हम वृत्त को C पर काटता हुआ एक चाप खींचते हैं।



आकृति 18.10

तब $\angle ACB$ एक समकोण है तथा $\triangle ACB$ **ही वाँछित समकोण त्रिभुज** है। (देखिए आकृति 18.10)

एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए जबकि दिया हुआ कर्ण और एक भुजा क्रमशः निम्न है :

(i) 5 सें० मी०, 3 सें० मी०

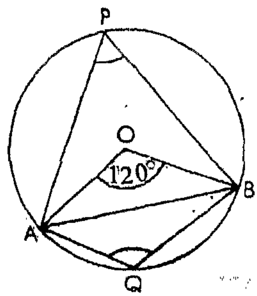
(ii) 6.4 सें० मी०, 4 सें० मी०

(iii) 5.6 सें० मी०, 2.9 सें० मी०

5. केन्द्र O लेकर एक वृत्त खींचिए और एक जीवा AB की इस प्रकार रचना* कीजिए कि $\angle AOB = 120°$ हो। (देखिए आकृति 18.11)

(क) वृत्त के दीर्घ चाप AB पर कोई बिंदु P लीजिए। P और A तथा P और B को मिलाइए। $\angle APB$ को मापिए। क्या $\angle APB = 60°$ है?

(ख) वृत्त के लघु चाप AB पर कोई बिंदु Q लीजिए। Q और A तथा Q और B को मिलाइए। $\angle AQB$ को मापिए। क्या $\angle AQB = 120°$ है?



आकृति 18.11

[हम देखते हैं कि,

$\angle APB + \angle AQB = 180°$

APBQ के प्रकार का चतुर्भुज जिसके शीर्ष वृत्त पर स्थित होते हैं एक **चक्रीय चतुर्भुज (cyclic quadrilateral)** कहलाता है। बिंदु A, P, B और Q **चक्रीय बिंदु (concyclic points)** कहलाते हैं।

हम विभिन्न वृत्त लेकर तथा कोण AOB के विभिन्न मानों को लेकर इस प्रयोग को दोहरा सकते हैं। प्रत्येक बार हम देखेंगे कि कोणों P और Q का

---

* वृत्त पर कोई बिंदु A लीजिए। A और O को मिलाइए। O पर एक कोण 120° का इस प्रकार बनाइए कि AO उसकी एक भुजा रहे। मान लीजिए दूसरी भुजा वृत्त को B पर काटती है। तब AB ही वाँछित जीवा है।

योग 180° है। इस प्रकार हम देखते हैं कि **चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक होते हैं।**

मुख्य संकलपनाएँ

केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब
वृत्त की समदूरस्थ जीवाएँ
अर्धवृत्त का कोण
चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण (अर्थात् केन्द्रीय कोण)
एक ही वृत्त-खंड के कोण
संकेन्द्रीय वृत्त
चक्रीय चतुर्भुज
चक्रीय बिंदु

एकक XIX

वर्ग और वर्गमूल

हम भाग की विधि से उन धनपूर्णांकों के वर्गमूल ज्ञात करना सीखेंगे जो पूर्ण वर्ग हैं। हम उन परिमेय संख्याओं के वर्गमूल निकालना भी सीखेंगे जो परिमेय संख्याओं के पूर्ण वर्ग हैं।

19.1 भूमिका

हम पूर्णांकों के वर्गों से पहले ही परिचित हैं। हम यह भी जानते हैं कि **गुणनखंड विधि (factor method)** के प्रयोग से उन धनपूर्णांकों के वर्गमूल किस प्रकार प्राप्त किए जाते हैं जो पूर्ण वर्ग हैं। अब हम उन धनपूर्णांकों के वर्गमूल ज्ञात करने के लिए जो पूर्ण वर्ग हैं एक अन्य विधि अर्थात् **भाग की विधि (division method)** सीखेंगे। हम उन परिमेय संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करने की विधि भी सीखेंगे जो परिमेय संख्याओं के पूर्ण वर्ग हैं।

19.2 एक महत्वपूर्ण पर्यवेक्षण

इस अनुच्छेद में हम जहाँ भी शब्द 'संख्या' का प्रयोग करेंगे उससे हमारा अभिप्रायः होगा धनपूर्णांक। हम संख्याओं के वर्गों से प्रारम्भ करेंगे।

1-अंक की सबसे छोटी संख्या कौन-सी है ? यह संख्या 1 है। इसके वर्ग में कितने अंक हैं ? क्योंकि $(1)=1$, अतः इसके वर्ग में 1 अंक है।

1-अंक की सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है ? यह संख्या 9 है। इसके वर्ग में कितने अंक हैं ? स्पष्ट है कि इसमें 2 अंक हैं।

यह सरलता से देखा जा सकता है कि 1 से 9 तक संख्याओं के वर्गों में या तो एक अथवा दो अंक हैं।

अत: हम देखते हैं कि **1-अंक की सभी संख्याओं के वर्गों में या तो 1[=2(1)−1] अथवा 2[=2(1)] अंक हैं।**

अब 2-अंकों की सबसे छोटी संख्या कौन सी है ? यह संख्या 10 है। हम देखते हैं कि इस के वर्ग में 3 अंक हैं। इसी प्रकार, 2-अंकों की सबसे बड़ी संख्या, 99 के वर्ग में 4 अंक हैं।

अत: हम देखते हैं कि **2-अंकों की सभी संख्याओं के वर्गों में या तो 3[=2(2)−1] अथवा 4[=2(2)] अंक हैं।**

पाठक यह जाँच* करें कि 3-अंकों की सभी संख्याओं के वर्गों में या तो 5[=2(3)−1] अथवा 6[=2(3)] अंक होते हैं, इत्यादि।

आपको याद होगा कि किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने की प्रक्रिया वर्ग करने की (squaring) की प्रक्रिया का प्रतिलोम होती है। **अतः क्या आप यह बता सकते हैं कि 3-अंकों की एक पूर्ण वर्ग संख्या, उदाहरणार्थ, 625 के वर्गमूल में कितने अंक होंगे ?** उपरोक्त महत्वपूर्ण पर्यवेक्षण के आधार पर हम तुरन्त यह कह सकते हैं कि 3-अंकों की पूर्ण वर्ग संख्या 625 के वर्गमूल में 2-अंक होंगे।

क्या आप यह बता सकते हैं कि 6-अंकों की पूर्ण वर्ग संख्या, उदाहरणार्थ, 110224 के वर्गमूल में कितने अंक होंगे ?** **पुनः यह बताना सरल है कि 110224 के वर्गमूल में 3-अंक होंगे।**

हम इस महत्वपूर्ण पर्यवेक्षण का प्रयोग करेंगे और **भाग की विधि** द्वारा

---

* हमें यह व्यापक परिणाम प्राप्त होता है कि **n-अंकों की सभी संख्याओं के वर्गों में या तो 2n-1 अथवा 2n अंक होते हैं।**

व्यापक रूप में, **किसी n-अंकों की पूर्ण वर्ग संख्या के वर्गमूल में $\frac{n}{2}$ अंक होंगे यदि n सम है तथा $\frac{n+1}{2}$ अंक होंगे, यदि n विषम है।

पूर्ण वर्ग धनपूर्णांकों के वर्गमूल ज्ञात करेंगे। इस विधि में विभिन्न चरणों का न्यायौचित्य देना कुछ कठिन है। **अतः हम केवल विभिन्न चरणों का कथन देंगे और उनका प्रयोग करना सीखेंगे।**

19.3 पूर्ण वर्ग धनपूर्णांकों के वर्गमूल—भाग की विधि

हम पूर्ण वर्ग धनपूर्णांकों के वर्गमूल निम्न चरणों में ज्ञात करते हैं। मान लीजिए कि हम 625 का वर्गमूल ज्ञात करना चाहते हैं। आपको याद होगा कि 3-अंकों की संख्या 625 के वर्गमूल में 2 अंक होते हैं।

चरण 1 : हम दाईं ओर से प्रारम्भ करके अंकों के जोड़े बनाते हैं। हम जोड़ों को पृथक करने के लिए अर्धविरामों (commas) का प्रयोग करते हैं।

हम देखेंगे कि बाईं ओर अंत में हमारे पास या तो एक जोड़ा अथवा अकेला एक अंक शेष रहता है।

प्रस्तुत उदाहरण में बाईं ओर अंत में अकेला अंक 6 शेष रहता है।

```
                    25
चरण II→      2 | 6,25 ←चरण I
            ×2 | 4
चरण IV→     45 | 225 ←चरण III
            ×5 | 225
                   0 ←चरण V
```

चरण II : बाईं ओर के अंतिम जोड़े (अथवा अकेले अंक) को लीजिए। हम 1-अंक की सबसे बड़ी संख्या, उदाहरणार्थ, x की खोज करते हैं जिसका वर्ग बाईं ओर के अंतिम जोड़े (अथवा अकेले अंक) से अधिक न हो।

हमारे उदाहरण में हमारे पास अकेला अंक '6' है। स्पष्ट है कि सबसे बड़ा x, 2 है जिसके लिए $x^2 \leqslant 6$ है।

वर्गमूल में x बाईं ओर से सबसे पहला अंक होगा।

चरण III : हम बाईं ओर के अंतिम जोड़े (अथवा अकेले अंक) में से x^2 घटाते हैं और इस प्रकार शेष बची संख्या के साथ अगला जोड़ा लगा देते हैं।

हमारे उदाहरण में शेष $6-(2)^2=2$ है। हम इसके साथ अगला जोड़ा

अर्थात् 25 लगा देते हैं तथा संख्या 225 प्राप्त करते हैं।

चरण IV : हम x को 2 से गुणा करते हैं। हम पुनः 1-अंक की बड़ी से बड़ी संख्या, उदाहरणार्थ, y खोजते हैं ताकि $(2x\times10+y)y\leqslant$ चरण III में प्राप्त संख्या हो।

y वर्गमूल में अगला अंक होगा।

हमारे उदाहरण में $2x=4$ है। हम $y=5$ प्राप्त करते हैं जिसके लिए $(4\times10+5)5\leqslant225$ है।

चरण V : हम चरण III की संख्या से y और $(2x\times10+y)$ के गुणनफल को घटाते हैं और इस प्रकार प्राप्त शेष राशि के साथ पुनः हम अगला जोड़ा लगा देते हैं।

चरण VI : वर्गमूल में अब तक प्राप्त किए गए अंकों से बनी संख्या को हम A से व्यक्त करते हैं। हम A को 2 से गुणा करते हैं। पुनः हम 1-अंक की सब से बड़ी संख्या, उदाहरणार्थ, z को खोजते हैं ताकि $(2A\times10+z)z\leqslant$ चरण V में प्राप्त संख्या हो।

z वर्गमूल में अगला अंक होगा।

चरण VII : चरण V की संख्या से हम z और $(2A\times10+z)$ के गुणनफल को घटाते हैं और इस प्रकार प्राप्त शेष संख्या के साथ पुनः हम अगला जोड़ा लगा देते हैं।

हम यह प्रक्रिया तब तक करते रहते हैं जब तक शून्य शेष नहीं बच जाता है और संख्या में कोई जोड़ा शेष नहीं रहता।

अपने उदाहरण में हमने चरण V में शेष शून्य प्राप्त किया था और संख्या में कोई जोड़ा शेष नहीं बचा था। अतः 625 का वर्गमूल 25 है।

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

पूर्ण वर्ग धनपूर्णांकों के वर्गमूल 110224 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।
न्यायौचित्य देना कुछ
और उनका प्रयोग

		332	
चरण II→	3	11,02,24	←चरण I
	×3	9	
चरण IV→	63	202	←चरण III
	×3	189	
चरण VI→	662	1324	←चरण V
	×2	1324	
		0	←चरण VII

इस प्रकार, $\sqrt{110224} = 332$

उदाहरण 2 : 1490841 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

		1221	
चरण II→	1	1,49,08,41	←चरण I
	×1	1	
चरण IV→	22	49	←चरण III
	×2	44	
चरण VI→	242	508	←चरण V
	×2	484	
चरण VIII→	2441	2441	←चरण VII
	×1	2441	
		0	←चरण IX

इस प्रकार, $\sqrt{1490841} = 1221$

टिप्पणी : इस उदाहरण में चरण III में जब हम सब से बाईं ओर के अंक 1 से $x^2 = 1^2 = 1$ घटाते हैं तो हमें शेष शून्य प्राप्त होता है। परन्तु क्योंकि संख्या में अंकों के और जोड़े शेष बचे हैं, यह प्रक्रिया यहाँ समाप्त नहीं हो जाती। हम शेष बचे शून्य को छोड़ देते हैं। फिर अगला जोड़ा लगाने से हमें चरण III के अंत में संख्या 49 प्राप्त होती है।

उदाहरण 3 : 46022656 का वर्गमूल ज्ञात कीजि... ।

...अंक की बड़ी से
...चरण III में

हल :

		6784	
चरण II→	6	46,02,26,56	←चरण I
	×6	36	
चरण IV→	127	1002	←चरण III
	×7	889	
चरण VI→	1348	11326	←चरण V
	×8	10784	
चरण VIII→	13564	54256	←चरण VII
	×4	54256	
		0	←चरण IX

इस प्रकार, $\sqrt{46022656} = 6784$

उदाहरण 4 : 966712464 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

		31092	
चरण II→	3	9,66,71,24,64	←चरण I
	×3	9	
चरण IV→	61	66	←चरण III
	×1	61	
चरण VI→	620	571	←चरण V
	×0	000	
चरण VIII→	6209	57124	←चरण VII
	×9	55881	
चरण X→	62182	124364	←चरण IX
	×2	124364	
		0	←चरण XI

इस प्रकार, $\sqrt{966712464} = 31092$

प्रश्नावली 19.1

1. (क) 3-अंकों की सबसे छोटी संख्या कौन सी है ? इसके वर्ग में कितने अंक हैं ?
   (ख) 3-अंकों की सबसे बड़ी संख्या कौन सी है ? इसके वर्ग में कितने अंक हैं ?
2. **जाँच कीजिए कि 4-अंकों की किसी संख्या के वर्ग में या तो 7[=2(4)−1] अथवा 8[=2(4)] अंक होते हैं।**
3. निर्णय कीजिए कि निम्न संख्याओं में से प्रत्येक के वर्गमूल में कितने अंक होंगे :
   (क) 2704 (ख) 123454321
   (ग) 18671041 (घ) 2831729796
   [वास्तव में वर्गमूल ज्ञात नहीं कीजिए ।]
4. भाग की विधि से निम्न संख्याओं में से प्रत्येक का वर्गमूल ज्ञात कीजिए :
   (i) 841 (ii) 1089
   (iii) 2401 (iv) 3844
   (v) 12321 (vi) 41209
   (vii) 100489 (viii) 119025
   (ix) 181476 (x) 431649
   (xi) 652864 (xii) 1234321
   (xiii) 9072144 (xiv) 37075921
   (xv) 56836521 (xvi) 65448100
   (xvii) 289238049 (xviii) 283114276
   (xix) 104101209 (xx) 408120804
5. एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल 14641 वर्ग मीटर है। इसकी भुजा निर्धारित कीजिए।
6. एक आयताकार खेत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से दुगुनी है। यदि खेत का क्षेत्रफल 15842 वर्ग मीटर हो तो खेत की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
7. दो वर्गों के क्षेत्रफल क्रमशः 324 वर्ग मीटर और 225 वर्ग मीटर हैं। उनकी भुजाओं का अनुपात निर्धारित कीजिए।

19.4 परिमेय संख्याओं के वर्ग

हम परिमेय संख्याओं को गुणा करना जानते हैं। आपको याद होगा कि यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ परिमेय संख्याएँ हों, तो उनका गुणनफल $\frac{a \times c}{b \times d}$ के रूप में परिभाषित किया जाता है तथा हम इसे इस प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$$

जब एक परिमेय संख्या को स्वयं से गुणा किया जाता है तो हमें जो प्राप्त होता है उसे हम उस परिमेय संख्या की द्वितीय घात अथवा वर्ग कहते हैं।

उदाहरणार्थ,

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right) \text{ का वर्ग}$$

$$\left(\frac{-6}{7}\right) \times \left(\frac{-6}{7}\right) = \left(\frac{-6}{7}\right)^2 = \left(\frac{-6}{7}\right) \text{ का वर्ग}$$

हम इन्हें निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{2^2}{3^2}$$

$$\left(\frac{-6}{7}\right)^2 = \frac{-6}{7} \times \frac{-6}{7} = \frac{(-6) \times (-6)}{7 \times 7} = \frac{(-6)^2}{7^2}$$

दूसरे शब्दों में, यदि $\frac{a}{b}$ एक परिमेय संख्या है, तो

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times a}{b \times b} = \frac{a^2}{b^2}$$

अतः एक परिमेय संख्या का वर्ग उसके अंश का वर्ग भाग (divided by) उसके हर का वर्ग के समान होता है।

हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण : निम्न में से प्रत्येक परिमेय संख्या का वर्ग ज्ञात कीजिए :

(क) $\frac{21}{25}$ (ख) $\frac{111}{323}$ (ग) $\frac{-1627}{3041}$

हल :

(क) $\left(\frac{21}{25}\right)^2 = \frac{(21)^2}{(25)^2} = \frac{441}{625}$

(ख) $\left(\frac{111}{323}\right)^2 = \frac{(111)^2}{(323)^2} = \frac{12321}{104329}$

(ग) $\left(\frac{-1627}{3041}\right)^2 = \frac{(-1627)^2}{(3041)^2} = \frac{2647129}{9247681}$

19.5 पूर्ण वर्ग परिमेय संख्याओं के वर्गमूल

हम अनुच्छेद 19.4 में देख चुके हैं कि एक परिमेय संख्या का वर्ग उस परिमेय संख्या को स्वयं से गुणा करने का परिणाम होता है। इस एकक के शेष भाग में हम केवल पूर्ण वर्ग परिमेय संख्याओं (**perfect square rational numbers**) से सम्बन्धित रहेंगे। प्रतिलोम प्रक्रिया अर्थात् वह परिमेय संख्या ज्ञात करना जिसका वर्ग वही परिमेय संख्या प्रदान करता है 'अवर्ग' करने (**unsquaring**) अथवा परिमेय संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने की प्रक्रिया कहलाती है। हम केवल धनात्मक वर्गमूल ही ज्ञात करेंगे और उसे हम केवल वर्गमूल कहेंगे।

हम उपपत्ति दिए बिना यह कथन देते हैं कि **किसी परिमेय संख्या का वर्गमूल उसके अंश का वर्गमूल भाग (divided by) उसके हर का वर्गमूल के समान है।**

हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : निम्न में से प्रत्येक का वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(क) $\frac{25}{36}$ (ख) $\frac{1369}{44521}$ (ग) $\frac{12544}{13689}$ (घ) $\frac{42025}{95481}$

हल :

(क) $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{5\times5}}{\sqrt{6\times6}} = \frac{5}{6}$

हम देखते हैं कि हमने $\sqrt{25}$ तथा $\sqrt{36}$ ज्ञात करने के लिए **गुणनखण्ड विधि** का प्रयोग किया है ।

(ख) $\sqrt{\frac{1369}{44521}}=\frac{\sqrt{1369}}{\sqrt{44521}}$
$=\frac{37}{211}$

$$\begin{array}{r|l} & 37 \\ \hline 3 & 13,69 \\ \times 3 & 9 \\ \hline 67 & 469 \\ \times 7 & 469 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 211 \\ \hline 2 & 4,45,21 \\ \times 2 & 4 \\ \hline 41 & 45 \\ \times 1 & 41 \\ \hline 421 & 421 \\ \times 1 & 421 \\ \hline & 0 \end{array}$$

हम देखते हैं कि हमने अंश और हर का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए **भाग की विधि** का प्रयोग किया है ।

(ग) $\sqrt{\frac{12544}{13689}}=\frac{\sqrt{12544}}{\sqrt{13689}}$

पाठक को चाहिए कि वह $\sqrt{12544}$ और $\sqrt{13689}$ ज्ञात करने के लिए भाग की विधि का प्रयोग करे। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$\sqrt{12544}=112$

तथा, $\sqrt{13689}=117$

इस प्रकार, $\sqrt{\frac{12544}{13689}}=\frac{112}{117}$

(घ) $\sqrt{\frac{42025}{95481}}=\frac{\sqrt{42025}}{\sqrt{95481}}$

पुनः हम यह पाठक के लिए छोड़ रहे हैं कि वह $\sqrt{42025}$ और $\sqrt{95481}$ ज्ञात करने के लिए **भाग की विधि** का प्रयोग करे।

$$\sqrt{42025}=205$$
$$\sqrt{95481}=309$$

इस प्रकार, $$\sqrt{\frac{42025}{95481}}=\frac{205}{309}$$

प्रश्नावली 19.2

निम्न में से प्रत्येक परिमेय संख्या का वर्ग ज्ञात कीजिए :

1. $\frac{41}{47}$ **2.** $\frac{-106}{205}$

3. $\frac{4218}{3007}$ **4.** $\frac{10001}{11111}$

5. $\frac{-212}{2529}$

निम्न में से प्रत्येक का वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

6. $\frac{49}{81}$ **7.** $\frac{36}{121}$ **8.** $\frac{169}{289}$

9. $\frac{100}{169}$ **10.** $\frac{144}{225}$ **11.** $\frac{529}{900}$

12. $\frac{676}{1089}$ **13.** $\frac{10609}{10816}$ **14.** $\frac{15129}{103041}$

15. $\frac{106929}{289}$ **16.** $\frac{43681}{974169}$ **17.** $\frac{136900}{78961}$

18. $\frac{321489}{585225}$ **19.** $\frac{10404}{603729}$ **20.** $\frac{9006001}{90601}$

19.6 ऐतिहासिक दृष्टिकोण

संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करने की **भाग की विधि**, शायद कुछ भिन्न रूप में, यूनानवासियों को ज्ञात थी। अरब और हिन्दू भी इस विधि का प्रयोग करते थे। यह विधि, जैसा कि आज हम प्रयोग करते हैं, सर्वप्रथम इटली के गणितज्ञ **पीट्रो ऐन्टोनियो केटाल्डी (1552—1626 ई०)** द्वारा प्रयुक्त की गई थी। उसके बाद के लेखकों ने दी गई संख्याओं के अंकों के जोड़े बनाने में बिन्दुओं (dots), कोलन (colons) तथा सीधी खड़ी रेखाओं (vertical bars) का प्रयोग किया। अधिकतर पूर्व कालीन लेखकों ने इस विधि की व्याख्या अथवा न्यायौचित्य दिए बिना इसके नियम प्रदान किए हैं।

मुख्य संकल्पनाएँ

वर्ग वर्गमूल	भाग की विधि

एकक XX

निर्देशांकों का परिचय

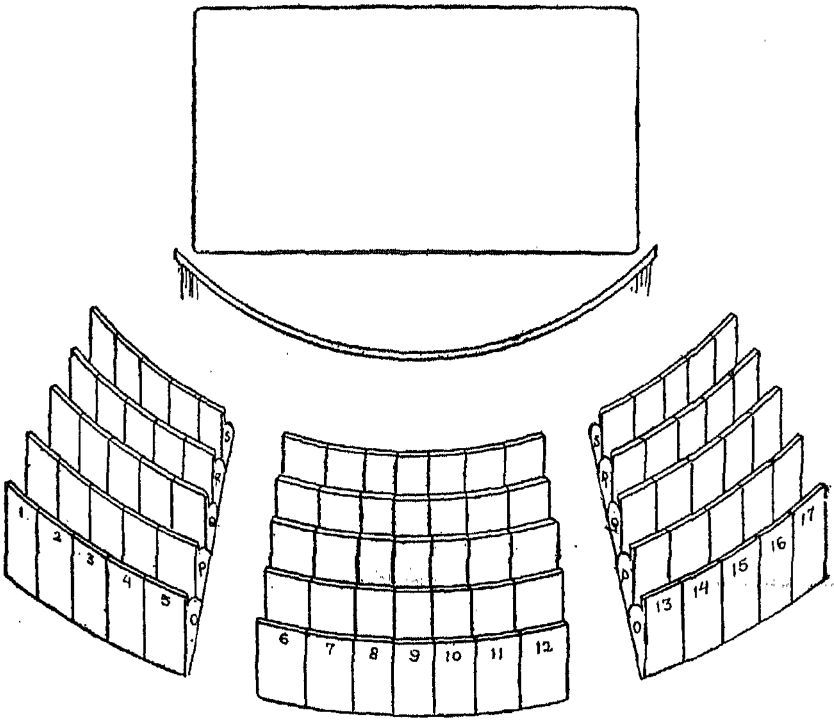
इस एकक में हम सीखेंगे कि एक तल में दिए हुए किसी बिन्दु के निर्देशांकों को किस प्रकार निर्धारित करते हैं। विकल्पतः यदि किसी बिन्दु के निर्देशांक दिए हों तो हम सीखेंगे कि एक तल में उसे किस प्रकार आलेखित (plot) किया जाता है।

20.1 भूमिका

हम यह पहले ही सीख चुके हैं कि पूर्णांकों और परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर कैसे निरूपित किया जाता है। अब हम सीखेंगे कि एक तल में किसी बिन्दु की स्थिति कैसे निर्धारित की जाती है। परन्तु आइए पहले निम्न स्थितियों पर विचार करें :

आप सिनेमा देखने के लिए एक टिकट खरीदते हैं। खिड़की पर बैठा हुआ व्यक्ति अपने सम्मुख एक चार्ट रखता है। वह आपकी टिकट पर P3, Q24, इत्यादि से आपकी सीट संख्या को अंकित करता है। P, Q, इत्यादि पंक्तियों के अक्षर हैं तथा 3, 24, इत्यादि प्रत्येक पंक्ति में कुर्सियों पर संख्याएँ हैं। (देखिए आकृति 20.1)। इस प्रकार आपकी सीट किसी विशेष पंक्ति में कोई विशेष कुर्सी है। हम देखते हैं कि अपनी सीट निर्धारित करने के लिए आपको अपनी पंक्ति के अक्षर और कुर्सी की संख्या दोनों की ही आवश्यकता है।

अब भारत के किसी मानचित्र को देखिए। आप किसी नगर की स्थिति कैसे निर्धारित करते हैं। किसी नगर की स्थिति उसके अक्षांश (latitude) और रेखांश (longitude) द्वारा निर्धारित की जाती है। उदाहरणार्थ, दिल्ली का अक्षांश 29° उ० है और इसका रेखांश 77° पू० है। बम्बई के अक्षांश और रेखांश क्या हैं ?



आकृति 20.1

हम पुनः देखते हैं कि मानचित्र में किसी नगर (स्थान) की स्थिति निर्धारित करने के लिए हमें उसके अक्षांश और रेखांश दोनों की आवश्यकता पड़ती है।

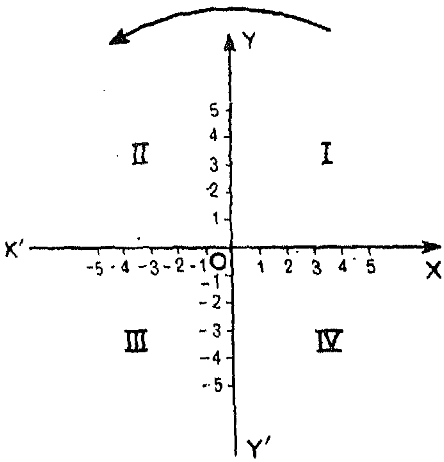
अगले अनुच्छेद में हम यह सीखेंगे कि एक तल में किसी बिन्दु की स्थिति कैसे निर्धारित की जाती है।

20.2 समकोणिक निर्देशांक

हम पृष्ठ के तल में दो संख्या रेखाएँ X'OX और Y'OY खींचते हैं जो बिन्दु O पर परस्पर लम्ब हैं, जैसा कि आकृति 20.2 में दिखाया गया है। रेखा X'OX को **x-अक्ष (x-axis)** तथा रेखा Y'OY को **y-अक्ष (y-axis)** कहा जाता है। उनका प्रतिच्छेद बिन्दु O **मूलबिन्दु (origin)** कहलाता है।

X'OX को क्षैतिज (horizontal) और Y'OY को ऊर्ध्वाधर (vertical) लेने की प्रथा है। यदि हम आकृति को अपने सम्मुख ऊर्ध्वाधर दिशा में थाम कर रखें तो ये रेखाएँ ऐसी ही दिखाई पड़ेंगी।

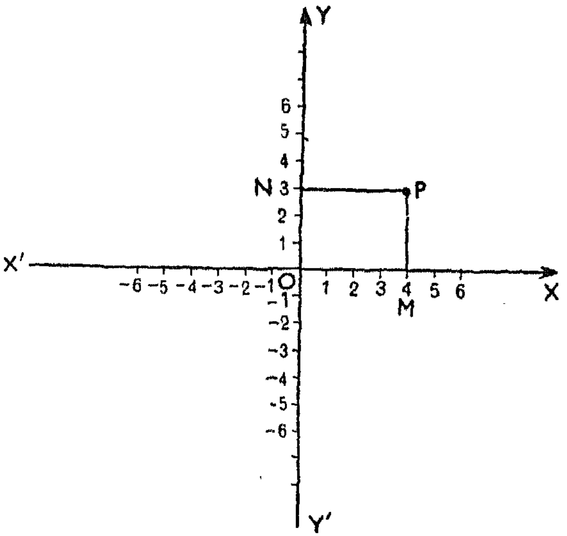
आपको याद होगा कि क्षैतिज संख्या रेखा पर धनात्मक संख्याओं को O की दाईं ओर तथा ऋणात्मक संख्याओं को O की बाईं ओर अंकित किया जाता है। ऊर्ध्वाधर संख्या रेखा के लिए हम धनात्मक संख्याओं को O से (Y की ओर) **ऊपर की दिशा में** तथा ऋणात्मक संख्याओं को O से (Y' की ओर) **नीचे की दिशा में** अंकित करते हैं। दोनों अक्षों में से प्रत्येक की धनात्मक दिशा तीर के निशान से दर्शाई गई है।



आकृति 20.2

दोनों अक्ष तल को चार भागों (क्षेत्रों) में विभाजित करते हैं। प्रत्येक भाग को एक **चतुर्थांश (quadrant)** कहा जाता है। चतुर्थांशों को (वामावर्त दिशा में) **I, II, III, IV** अंकित किया जाता है, जैसा कि आकृति 20.2 में दिखाया गया है। क्योंकि अक्ष परस्पर लम्ब (समकोण पर) हैं अतः हम उन्हें **समकोणिक निर्देशांक अक्ष (rectangular coordinate axes)** अथवा केवल **निर्देशांक अक्ष (coordinate axes)** कहते हैं। अब तल **निर्देशांक तल (coordinate plane)** कहलाता है।

आइए अब निर्देशांक तल में कोई बिन्दु P लें। (देखिए आकृति 20.3) अक्षों X'OX तथा Y'OY के सापेक्ष हम इसकी स्थिति किस प्रकार निर्धारित करते हैं? हम x-अक्ष के अनुदिश (या **x**-अक्ष के समान्तर किसी रेखा के अनुदिश) O की दाईं ओर या बाईं ओर ही चल सकते हैं अथवा y-अक्ष के अनुदिश (या y-अक्ष के समान्तर किसी रेखा के अनुदिश) O से ऊपर की ओर या नीचे की ओर ही चल सकते हैं (क्यों ?)



आकृति 20.3

हम P से x-अक्ष पर PM लम्ब खींचते हैं तथा y-अक्ष पर P से एक अन्य लम्ब PN खींचते हैं। हम देखते हैं कि M, x-अक्ष पर संख्या 4 को निरूपित करता है। इसी प्रकार N, y-अक्ष पर संख्या 3 को निरूपित करता है। अतः, यदि हम x-अक्ष के अनुदिश O से दाईं ओर 4 मात्रक (units) दूरी चलें और फिर y-अक्ष के समांतर एक रेखा के अनुदिश ऊपर की ओर 3 मात्रक दूरी चलें तो हम बिन्दु P पर पहुँच जाते हैं। विकल्पतः, यदि हम y-अक्ष के अनुदिश O से ऊपर की ओर 3 मात्रक दूरी चलें और फिर x-अक्ष के समान्तर एक रेखा के अनुदिश दाईं ओर 4 मात्रक दूरी चलें तो हम पुनः बिन्दु P पर पहुँच जाते हैं।

4 बिन्दु P का **x-निर्देशांक (x-coordinate)** अथवा **भुज (abscissa)** कहलाता है। 3 बिन्दु P का **y-निर्देशांक (y-coordinate)** अथवा **कोटि (ordinate)** कहलाता है।

इस प्रकार किसी बिन्दु P का x-निर्देशांक वह संख्या है जो बिन्दु P से x-अक्ष पर लम्ब के पाद (foot) द्वारा निरूपित है। इसी प्रकार, उस बिन्दु P का y-निर्देशांक वह संख्या है जो बिन्दु P से y-अक्ष पर लम्ब के पाद द्वारा निरूपित है। ये दोनों मिलकर बिन्दु P के **(समकोणिक)** निर्देशांक कहलाते हैं।

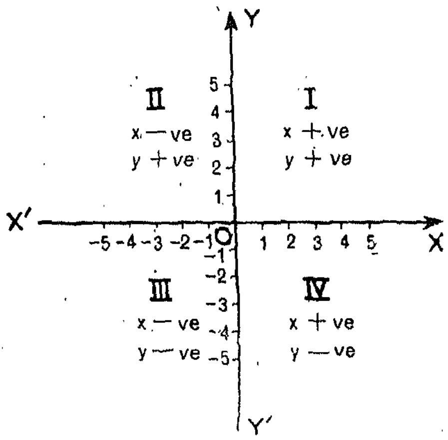
प्रथा यह है कि पहले किसी बिन्दु के x-निर्देशांक और फिर उसके y-निर्देशांक को लिखा जाता है। हम बिन्दु P के निर्देशांक को (x-निर्देशांक, y-निर्देशांक) के रूप में लिखते हैं।

आकृति 20.3 में हम P के निर्देशांकों को किस प्रकार लिखते हैं? हम इन P (4,3) लिखते हैं।

हम देखते हैं कि पहले चतुर्थांश (I) में किसी बिन्दु के लिए उसके x-निर्देशांक और y-निर्देशांक दोनों ही धनात्मक होते हैं।

दूसरे चतुर्थांश (II) में किसी बिन्दु के लिए उसका x-निर्देशांक ऋणात्मक होता है, जबकि ,y-निर्देशांक धनात्मक होता है।

तीसरे चतुर्थांश (III) में किसी बिन्दु के लिए उसके x-निदशांक और y-निर्देशांक दोनों ही ऋणात्मक होते हैं।



आकृति 20.4

अंत में, चौथे चतुर्थांश (IV) में किसी बिन्दु के लिए उसका x-निर्देशांक धनात्मक होता है जबकि y-निर्देशांक ऋणात्मक होता है।

यह तथ्य आकृति 20.4 में दर्शाया गया है।

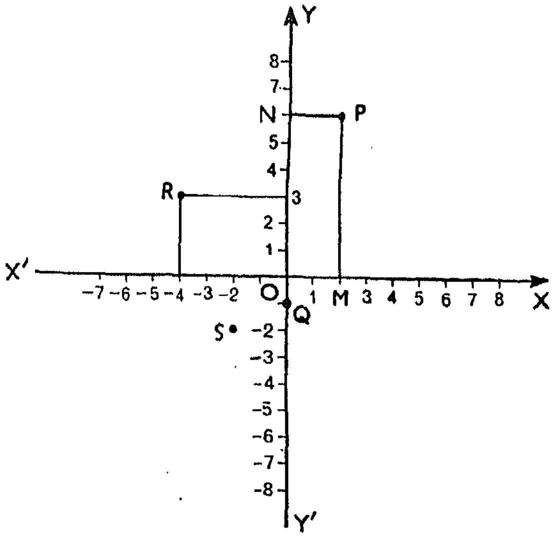
मूलबिन्दु के निर्देशांक क्या हैं? हम देखते हैं कि इसके x-निर्देशांक और y-निर्देशांक दोनों ही शून्य हैं। हम इसे O (0, 0) लिखते हैं।

उदाहरण : आकृति 20.5 में बिन्दुओं P, Q, R और S के निर्देशांक निर्धारित कीजिए।

हल : P के निर्देशांकों को निर्धारित करने के लिए हम P से PM और PN लम्ब खींचते हैं,जैसा कि आकृति 20.5 में दिखाया गया है। तब P,(OM,MP) है।

हम देखते हैं कि OM=2 और MP=ON=6 है। इस प्रकार, P के निर्देशांक (2, 6) हैं।

इसी प्रकार, R के निर्देशांक (—4, 3), S के निर्देशांक (—2,—2) और Q के निर्देशांक (0,—1) हैं।



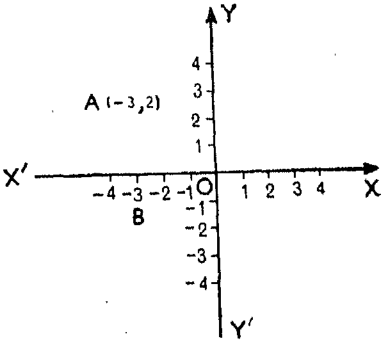
आकृति 20.5

20.3 बिंदुओं का आलेखन

अब हम सीखेंगे कि एक बिंदु को जिसके निर्देशांक दिए हैं कैसे आलेखित किया जाता है। दूसरे शब्दों में, हम यह सीखेंगे कि तल में एक बिंदु उदाहरणार्थ A को कैसे प्राप्त किया जाए जिसके निर्देशांक दिए गए हैं।

आइए एक बिंदु को आलेखित (plot) करें जिसके निर्देशांक (−3,2) हों। मान लीजिए वाँछित बिन्दु A है।

हम दोनों निर्देशांक अक्ष खींचते हैं जैसा कि आकृति 20.6 में दिखाया गया है। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि A किस चतुर्थांश में स्थित होगा ? हम O से आरम्भ करते हैं और x-अक्ष पर O की बाईं ओर 3 मात्रक दूरी चलते हैं। हम एक बिन्दु उदाहरणार्थ B पर पहुँचते हैं। B से हम y-अक्ष के समांतर एक रेखा



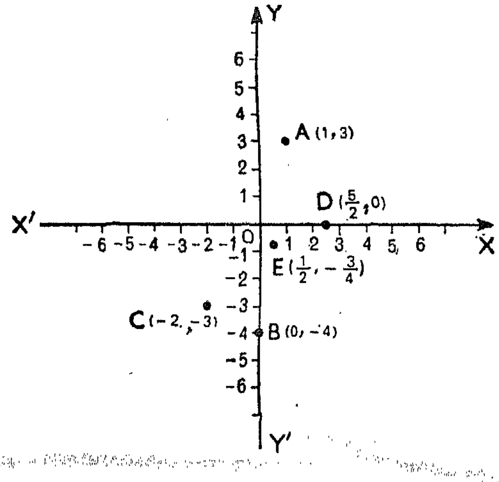
आकृति 20.6

के अनुदिश O से ऊपर की ओर 2 मात्रक दूरी चलते हैं। इस प्रकार हम जिस बिन्दु पर पहुँचते हैं वह वाँछित बिन्दु A(−3, 2) है।

उदाहरण : निम्न बिन्दुओं को आलेखित कीजिए :

$$A\ (1, 3),\ B\ (0, -4),\ C\ (-2, -3),\ D\left(\frac{5}{2}, 0\right) \text{ तथा } E\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

हल : वाँछित बिन्दु नीचे आकृति 20.7 में दर्शाए गए हैं :



आकृति 20.7

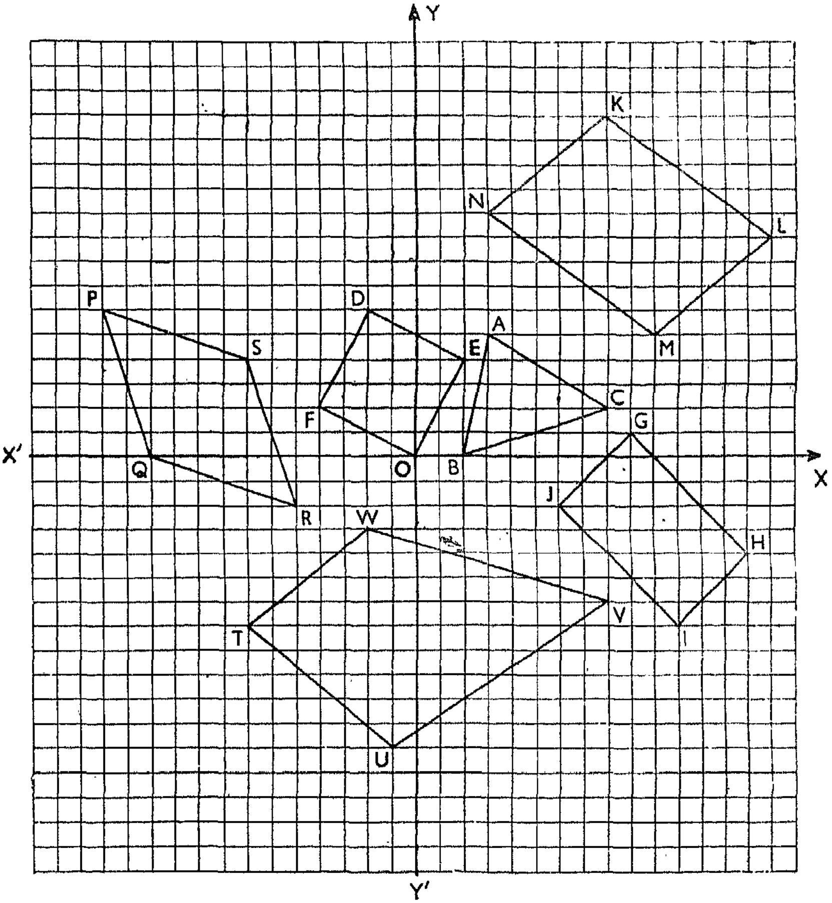
20.4 ऐतिहासिक दृष्टिकोण

निर्देशांकों की धारणा काफी पुरानी है। ऐसा विश्वास किया जाता है कि प्राचीन मिस्रवासी भी इनका प्रयोग किया करते थे। परन्तु निर्देशांकों के व्यवस्थित विकास का उद्‌भव कुछ समय पहले ही हुआ है। इसका श्रेय दो फ्राँसीसी गणितज्ञों **रेने दकार्त (1596-1650 ई०)** और **पियरे डि फर्मेट (1601-1665 ई०)** को जाता है। ऊपर की भांति दिखाए गए किसी बिन्दु के निर्देशांकों को दकार्त के सम्मान में **कार्टेजियन निर्देशांक (Cartesian Coordinates)** भी कहा जाता है।

प्रश्नावली 20.1

1. तल का वह चतुर्थांश बताइए जिसमें निम्न बिन्दुओं में से प्रत्येक स्थित है :
$A(-3, 2)$, $B\left(\frac{1}{2}, -6\right)$, $C(-1, -1)$, $D(7, -3)$, $E(5, 5)$

2. आकृति 20.8 में दर्शाई गई प्रत्येक आकृति के सभी कोनों के निर्देशांक लिखिए।



आकृति 20.8

3. निम्न बिन्दुओं को आलेखित कीजिए :
(0, 0), (0, –3), $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right)$, (–1, –6), (2, –2), (–2, 2)
(–2, –2), (–1, 0)
4. निम्न बिन्दुओं को एक ही निर्देशांक तल में आलेखित कीजिए : P (6, –4), Q (6, 4), R (–6, 4), और S (–6, –4)। P और Q, Q और R, R और S, तथा S और P को मिलाइए। आप कैसी आकृति प्राप्त करते हैं ?
5. A (–2, –6), B (0, 0) और C (1, 3) को आलेखित कीजिए। A और B तथा B और C को मिलाइए। क्या A, B और C एक ही रेखा पर स्थित हैं ?
6. P (5, 4), Q (–3, 6) और R (4, –6) को आलेखित कीजिए। PQ, QR और RP को मिलाइए। आप क्या देखते हैं ?
7. कोई तीन ऐसे बिन्दु आलेखित कीजिए कि प्रत्येक का भुज उसकी कोटि से आधा हो। इन बिन्दुओं को दो-दो करके मिलाइए। क्या वे मूलबिन्दु से होकर जाती हुई एक रेखा पर स्थित हैं ?
8. कोई दो ऐसे बिन्दु आलेखित कीजिए कि प्रत्येक की कोटि उसके भुज से एक कम हो।
9. बिन्दुओं (0, 2), (0, 5) और (0, –2) को आलेखित कीजिए। आप क्या देखते हैं ?
10. बिन्दुओं (–1, 0), (2, 0) और (5, 0), को आलेखित कीजिए। आप क्या देखते हैं ?
11. निर्णय कीजिए कि निम्नलिखित कथनों में से कौन-सा कथन सत्य है और कौन-सा असत्य। सकारण उत्तर दीजिए।
(क) एक समकोणिक निर्देशांक पद्धति में x-अक्ष और y-अक्ष परस्पर लम्ब होते हैं।
(ख) एक समकोणिक निर्देशांक तल में वह संख्या जो किसी बिन्दु से x-अक्ष पर लम्ब के पाद द्वारा निरूपित है उस बिन्दु का x-निर्देशांक कहलाती है।
(ग) एक समकोणिक निर्देशांक तल में वह संख्या जो किसी बिन्दु से y-अक्ष पर लम्ब के पाद द्वारा निरूपित है उस बिन्दु का y-निर्देशांक कहलाती है।

(घ) यदि किसी बिन्दु का भुज और कोटि दोनों ही ऋणात्मक हैं तो वह बिन्दु पहले चतुर्थांश में स्थित होगा।

(ङ) वह बिन्दु जिसका भुज शून्य है, y-अक्ष पर स्थित होगा।

(च) वह बिन्दु जिसकी कोटि शून्य है, x-अक्ष पर स्थित होगा।

मुख्य संकलपनाएँ

x-अक्ष
y-अक्ष
मूलबिन्दु
निर्देशांक अक्ष
निर्देशांक तल
चतुर्थांश
x-निर्देशांक (भुज)
y-निर्देशांक (कोटि)
एक बिन्दु के निर्देशांक

एकक XXI

दैनिक जीवन में गणित

इस एकक में हम लाभ और हानि, साधारण ब्याज, इत्यादि विषयों में अनुपात और प्रतिशत के अनुप्रयोगों का अध्ययन जितना अब तक कर चुके हैं उससे कुछ उच्चतर स्तर पर करेंगे। हम इकाई की विधि तथा समय और काम, समय और दूरी, इत्यादि की समस्याओं में उसके अनुप्रयोगों का भी अध्ययन करेंगे।

21.1 पुनरावलोकन

आपको अपनी पिछली कक्षाओं से 'अनुपात, प्रतिशत और उनके अनुप्रयोग' पर एकक को दोहराना चाहिए। विशेष तौर पर आपको निम्नलिखित संकल्पनाओं का पुनरावलोकन करना चाहिए :

अनुपात—अनुपात के पद, सरलतम रूप में अनुपात
समानुपात—समानुपात के पद, मध्य और सिरों के पद
अनुक्रमानुपात—आनुपातिक स्थिरांक
व्युत्क्रमानुपात—आनुपातिक स्थिरांक
प्रतिशत
लाभ और हानि—क्रयमूल्य, विक्रय मूल, लाभ, हानि
साधारण ब्याज—मूलधन, ब्याज, मिश्रधन

उपरोक्त संकल्पनाओं को समझाने के लिए हम जितना पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं उससे कुछ उच्च स्तर के कुछ उदाहरण आगे दे रहे हैं।

उदाहरण 1 : एक परिवार के तीन सदस्यों A, B और C की मासिक आय 2 : 3 : 4 के अनुपात में है। यदि तीनों प्रति मास 972 रु० कमाते हों, तो प्रत्येक की मासिक आय निर्धारित कीजिए।

हल : अनुपात 2 : 3 : 4 का क्या अर्थ है ? इसका अर्थ यह है कि यदि A, 2 रु० कमाता है तो B, 3 रु० तथा C, 4 रु० कमाता है और तीनों (2+3+4) रु० अर्थात् 9 रु० कमाते हैं। इस प्रकार A की 2 रु० (9 में से) आय कुल आय का दो बटा नौ भाग है, B की 3 रु० (9 रु० में से) आय कुल आय का तीन बटा नौ भाग है और C की 4 रु० (9 में से) आय कुल आय का चार बटा नौ भाग है।

अब तीनों मिलकर 972 रु० कमाते हैं। इस प्रकार,

$$\text{A की मासिक आय} = \frac{2}{9} \times 972 = 216 \text{ रु०}$$

$$\text{B की मासिक आय} = \frac{3}{9} \times 972 = 324 \text{ रु०}$$

$$\text{C की मासिक आय} = \frac{4}{9} \times 972 = 432 \text{ रु०}$$

उदाहरण 2 : एक परीक्षा में मोहन द्वारा जैविकी और रसायन में प्राप्त किए गये अंकों का वही अनुपात है जो उसके द्वारा रसायन और भौतिकी में प्राप्त अंकों का है। उसने जैविकी में 48 और रसायन में 60 अंक प्राप्त किए। भौतिकी में मोहन के अंक ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि मोहन ने भौतिकी में x अंक प्राप्त किए। तब हमें दिया है कि

जैविकी में अंक : रसायन में अंक = रसायन में अंक : भौतिकी में अंक

अर्थात्, $48 : 60 = 60 : x$

इस गुण का प्रयोग करते हुए कि एक समानुपात में सिरों के पदों का गुणनफल उसके मध्य पदों के गुणनफल के समान होता है, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$48 \times x = 60 \times 60$$

इस प्रकार,

$$x=\frac{3600}{48}=75$$

दूसरे शब्दों में, मोहन ने भौतिकी में 75 अंक प्राप्त किए।
[पाठक को चाहिए कि वह यह जाँच करे कि 48 : 60=60 : 75 है ।]

उदाहरण 3 : एक व्यापारी 60 रु० प्रति सैकड़ा के हिसाब से 1440 गिलास खरीदता है। माल ले जाने में उसे 36 रु० की लागत आती है। परन्तु ले जाते समय 28 गिलास टूट जाते हैं । वह शेष गिलासों को 80 पैं० प्रति गिलास के हिसाब से बेच देता है। उसका लाभ निर्धारित कीजिए।

हल : एक गिलास का क्रय मूल्य=60 पैं०

इस प्रकार, 1440 गिलासों का क्रय मूल्य$=\frac{1440\times 60}{100}=864$ रु०

इसमें हम माल ढोने की लागत भी जोड़नी है। इस प्रकार,

कुल क्रय मूल्य$=(864+36)$ रु०$=900$ रु०

अब क्योंकि 28 गिलास टूट जाते हैं, अत: व्यापारी के पास बेचने के लिए $1440-28=1412$ गिलास शेष रहते हैं।

उसका विक्रय मूल्य$=\frac{1412\times 80}{100}$ रु०$=1129.60$ रु०

अत:, लाभ = विक्रय मूल्य — क्रय मूल्य
$=(1129.60-900)$ रु०
$=229.60$ रु०.

दूसरे शब्दों में, व्यापारी को 229.60 रु० का लाभ होता है।
[प्रतिशत के रूप में व्यापारी को

$$\frac{229.60}{900}\times 100=25.5\%$$ (लगभग) लाभ होता है।]

उदाहरण 4 : एक किसान ट्रैक्टर खरीदने के लिए एक सहकारी बैंक से 9% वार्षिक दर पर धन उधार लेता है । दो वर्ष के अंत में वह मूलधन और 3960 रु० ब्याज के रूप में लौटा देता है। किसान द्वारा उधार लिया गया धन ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $r=9\%\left(=\frac{9}{100}\right)$, $t=2$ तथा $I=3960$, $p=?$

हम सूत्र I=prt का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$3960=p\times\frac{9}{100}\times2$$

इस प्रकार,

$$p=\frac{3960\times100}{9\times2}=22000$$

दूसरे शब्दों में, किसान ने बैंक से 22000 रु० उधार लिए थे।

उदाहरण 5 : 12% वार्षिक दर पर 6000 रु० की राशि कितने समय के लिए उधार दी जाए ताकि 1620 रु० ब्याज के रूप में प्राप्त हों ?

हल : यहाँ, $p=6000$, $r=\frac{12}{100}$, $t=?$ तथा $I=1620$

पुन: सूत्र I=prt का प्रयोग करके हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$1620=6000\times\frac{12}{100}\times t$$

इस प्रकार,

$$t=\frac{1620}{720}=\frac{27}{12}=2\frac{1}{4}$$

दूसरे शब्दों में, राशि $2\frac{1}{4}$ वर्षों के लिये उधार दी जानी चाहिए।

प्रश्नावली 21.1
(अनुपात पर)

1. सुरेन्द्र की मासिक आय 750 रु० है। वह अपनी आय का चार बटा पच्चीस भाग किराये पर और दो तिहाई भाग विविध मदों पर खर्च कर देता है। उसकी किराये पर खर्च की गई राशि ज्ञात कीजिए। विविध मदों पर वह कितना खर्च करता है ? उसके किराये पर खर्च और विविध मदों पर खर्च का अनुपात भी ज्ञात कीजिए।

2. कमलेश एक निश्चित दर से चीनी पर प्रति मास 36 रु० खर्च करती है। यदि चीनी का मूल्य 6 : 7 के अनुपात से बढ़ जाए तो चीनी की उतनी ही मात्रा खरीदने में कमलेश को कितनी राशि खर्च करनी पड़ेगी ?
3. 30 मीटर चौड़े एक आयताकार खेत का क्षेत्रफल 1080 वर्ग मीटर है। उसकी लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात निर्धारित कीजिए।
[संकेत : आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई]
4. 70 विद्यार्थियों की एक कक्षा में, विद्यार्थियों की संख्या का दसवाँ भाग एक मासिक परीक्षा में नहीं बैठा। शेष विद्यार्थियों में से 18 विद्यार्थी फेल हुए और अन्य सब पास हुए। पास होने वाले तथा फेल होने वाले विद्यार्थियों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
5. वर्ष के मासों में से 30-दिन वाले मासों की संख्या और 31-दिन वाले मासों की संख्या का अनुपात ज्ञात कीजिए।
6. 8000 रु० की राशि A, B और C में 1 : 3 : 4 के अनुपात में विभाजित की जानी है। प्रत्येक का भाग ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली 21.2
(समानुपात, अनुक्रमानुपात और व्युत्क्रमानुपात पर)

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक समानुपात में '*' द्वारा दर्शाए गये लुप्त पदों को ज्ञात कीजिए :

(i) $5 : 10 = * : 16$

(ii) $9 : 7 = 27 : *$

(iii) $* : 3 = 22 : 6$

(iv) $\frac{14}{*} = \frac{4}{10}$

(v) $* : 7 = 16 : 28$

(vi) $\frac{11}{3} = \frac{*}{9}$

(vii) $\frac{16}{4} = \frac{64}{*}$

2. एक चिड़ियाघर में तोतों और चिड़ियों की संख्याओं का अनुपात वही है जो चिड़ियों और कबूतरों की संख्याओं का है । चिड़ियाघर में 40 चिड़ियाँ और 50 कबूतर हैं । तोतों की संख्या ज्ञात कीजिए ।

3. दो भिन्न वस्तुओं की छायाओं की लम्बाइयाँ उन वस्तुओं की ऊँचाइयों की समानुपाती हैं, जबकि लम्बाई और ऊँचाई एक साथ मापी जाती हैं ।
   (क) एक खम्बे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी छाया 4 मीटर लम्बी है, जबकि उसी समय 2 मीटर लम्बे एक आदमी की छाया 1.6 मीटर है ।
   (ख) एक 9 मीटर ऊँचे पोल की छाया 6 मीटर है । 30 मीटर ऊँची एक मीनार की छाया की लम्बाई निर्धारित कीजिए ।

4. रोहित $\frac{35}{4}$ सें० मी० लम्बे और $\frac{25}{4}$ सें० मी० चौड़े एक नेगेटिव से $12\frac{1}{2}$ सें० मी० चौड़ा एक फोटो बनाना चाहता है । फोटो की लम्बाई क्या होगी ?

5. यदि एक अमरीकन डालर 8 भारतीय रुपयों के बराबर हो तो मोहन को 1500 रु० के बदले कितने अमरीकन डालर प्राप्त होंगे ?
   [मान लीजिए कि विनिमय दर (rate of exchange) में कमीशन की राशि सम्मिलित है ।]

6. एक घड़ी प्रति दिन 6 मिनट पीछे हो जाती है । वह 60 घन्टों में कितनी पीछे हो जाएगी ?

7. x, y के अनुक्रमानुपाती है और जब $y=\frac{36}{7}$ है तो $x=18$ है । जब $y=\frac{12}{7}$ हो तो x ज्ञात कीजिए । साथ ही, जब $x=42$ हो तो y ज्ञात कीजिए ।

8. x, y+z के अनुक्रमानुपाती है । जब $y=7$ और $z=-1$ है तो $x=-4$ है । जब $x=12$ और $z=24$ हो तो y ज्ञात कीजिए ।

9. x, u के व्युत्क्रमानुपाती है। जब $u=\frac{4}{5}$ है तो $x=1$ है। निम्न ज्ञात कीजिए :

(i) x, जब $u=\frac{-8}{5}$

(ii) u, जब $x=-3$

10. गुरुत्वाकर्षण के अन्तर्गत मुक्त रूप से विश्राम से गिरती हुई एक वस्तु द्वारा चली दूरी 's' बीते हुए समय 't' के वर्ग के अनुक्रमानुपाती है। जब $t=2$ है तो $s=19.6$ है। निम्न निर्धारित कीजिए :

(i). आनुपातिक स्थिरांक, K

(ii) s, जब $t=4$ है

(iii) t, जब $s=122.5$ है (ध्यान दीजिए कि t के ऋणात्मक मान का कोई अर्थ नहीं है।)

प्रश्नावली 21.3
(प्रतिशत पर)

1. हरि ने एक परीक्षा में 200 अंक प्राप्त किए। यदि उसने कुल अंकों के 80% अंक प्राप्त किए हों तो परीक्षा के कुल अंक ज्ञात कीजिए।
2. (क) 120, 200 का क्या प्रतिशत है ?
   (ख) 200 का 0.5% क्या है ?
   (ग) 100 किस संख्या का 10% है ?
3. कौन-सी संख्या 60 से 50% अधिक है ?
4. कौन-सी संख्या 80 से 60% कम है ?
5. किसी वर्ष में एक छोटे शहर की जनसंख्या 10000 से बढ़कर 10300 हो गई। प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए।
6. 2 मी० लम्बा कपड़ा धोने पर 10% सुकड़ जाता है। धोने के बाद कपड़े की लम्बाई क्या रह जाएगी ?
7. किस संख्या का 70%, 49 है ?

प्रश्नावली 21.4
(लाभ और हानि पर)

1. रमेश ने 120 संतरे 40 पै० प्रति संतरे की दर से खरीदे। उसने 60%

संतरे 50 पै० प्रति संतरे के दर से और शेष संतरे 40 पै० प्रति संतरे के दर से बेचे। उसका कुल लाभ ज्ञात कीजिए। इसे प्रतिशत के रूप में भी व्यक्त कीजिए।

2. एक व्यापारी ने 450 रु० में एक सिलाई की मशीन खरीदी। यदि वह इस पर 14% लाभ कमाना चाहे तो उसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

3. एक व्यक्ति ने 500 रु० प्रति घोड़े के हिसाब से 2 घोड़े खरीदे। उसने एक घोड़ा 15% लाभ पर बेच दिया। परन्तु दूसरा घोड़ा बीमार हो गया और उसे वह घोड़ा हानि पर बेचना पड़ा। यदि पूरे सौदे पर उसे कुल 45 रु० की हानि हुई हो तो बीमार घोड़े का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
[**संकेत :** दोनों घोड़ों का क्रय मूल्य = 1000 रु० और दोनों घोड़ों का विक्रय मूल्य = 955 रु० (क्यों ?)]

4. रहीम ने अपनी कार 6% हानि पर बेची। यदि उसे 2100 रु० की हानि हुई हो तो कार का क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

5. एक फेरीवाले ने 12 रु० प्रति सैकड़ा के हिसाब से 720 केले खरीदे। 10% केले सड़े हुए निकले, अतः वे 5 रु० प्रति सैकड़ा के हिसाब से बेचने पड़े। उसने शेष केले 15 रु० प्रति सैकड़ा के हिसाब से बेचे। उसका प्रतिशत लाभ ज्ञात कीजिए।

6. एक किसान ने एक भैंस 2200 रु० में और एक गाय 900 रु० में खरीदी। उसने भैंस 5% हानि पर बेच दी परन्तु गाय बेचने में उसने 10% लाभ कमाया। उसका कुल लाभ या हानि ज्ञात कीजिए।

7. एक रेडियो को 616 रु० में बेचने से महेन्द्र को 12% लाभ होता है। उसका क्रय मूल्य और लाभ ज्ञात कीजिए।

8. योगेश ने एक प्लाट 20% लाभ पर धर्मेन्द्र को बेचा। धर्मेन्द्र ने उसे 10% लाभ पर अशरफ़ को बेच दिया। यदि अशरफ़ को प्लाट के लिए 33000 रु० देने पड़े तो योगेश को इसके लिए क्या देना पड़ा ?

प्रश्नावली 21.5
(साधारण ब्याज पर)

1. इजहार ने 7% वार्षिक दर पर 1400 रु० उधार लिए। वार्षिक ब्याज और

4 वर्ष के अंत में लौटाई गई कुल राशि निर्धारित कीजिए।

2. शीला ने 1650 रु० साधारण ब्याज पर उधार लिए और 3 वर्ष के अंत में 1947 रु० लौटाए। ब्याज की वार्षिक दर निर्धारित कीजिए।

3. वह धन राशि ज्ञात कीजिए जिस पर 8% वार्षिक दर से 4 वर्ष में 640 रु० ब्याज प्राप्त होगा।

4. मुझे किस वार्षिक दर पर 2500 रु० उधार देने चाहिए कि 2 वर्ष में 2950 रु० वापिस मिलें ?

5. कितने समय में 9% वार्षिक दर से 3600 रु०, 4086 रु० हो जायेंगे ?

6. बैंक में जमा की गई धनराशि साधारण ब्याज पर 10 वर्षों में दुगुनी हो जाती है। ब्याज की वार्षिक दर निर्धारित कीजिए।

7. साधारण ब्याज की वह वार्षिक दर निर्धारित कीजिए जिस पर 4 वर्षों में 1462.50 रु०, 1755 रु० हो जायेंगे।

8. 600 रु०, 5% वार्षिक दर से साधारण ब्याज पर जमा किए जाते हैं। कितने समय में यह राशि दुगुनी हो जाएगी ?

21.2 इकाई की विधि

आइए निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें :

उदाहरण 1 : 12 मीटर कपड़े की लागत 51 रु० है। 20 मीटर कपड़े की लागत निर्धारित कीजिए।

हल : क्योंकि 12 मीटर कपड़े की लागत = 51 रु० है,

अतः, 1 मीटर कपड़े की लागत $= \frac{51}{12}$ रु०

इस प्रकार, 20 मीटर कपड़े की लागत $= \left(\frac{51}{12} \times 20\right)$ रु० $= 85$ रु०

हमें 12 मीटर कपड़े की लागत दी गई थी। हमने **1 मीटर** कपड़े की लागत ज्ञात की और इससे 20 मीटर कपड़े की लागत निर्धारित की। यह विधि **इकाई की विधि (The Unitary Method)** कहलाती है क्योंकि इसमें हम पहले 1 इकाई का मूल्य (लागत) ज्ञात करते हैं।

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 2 : एक पुस्तक विक्रेता ने एक पुस्तक की 20 प्रतियाँ 89 रु० में खरीदीं। प्रति पुस्तक लागत क्या है ? 36 प्रतियों की लागत भी ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि 20 प्रतियों की लागत $=89$ रु० है;

अतः, 1 प्रति की लागत $=\frac{89}{20}$ रु० $=4.45$ रु०

इस प्रकार, 36 प्रतियों की लागत $=\left(\frac{89}{20}\times 36\right)$ रु०

$=160.20$ रु०

अतः प्रति पुस्तक लागत 4.45 रु० और 36 प्रतियों की लागत 160.20 रु० है।

उदाहरण 3 : 65 कि० मी०/घंटा की समान गति से चलती हुई एक कार एक निश्चित दूरी को 8 घंटे में तय करती है। यदि कार की गति घटा कर 52 कि० मी०/घंटा कर दी जाए तो उतनी ही दूरी वापिस आने में उसे कितना समय लगेगा ?

हल : 65 कि० मी०/घंटा की गति से कुल समय लगता है $=8$ घंटे

अतः, 1 कि० मी०/घंटा की गति से समय लगेगा $=8\times 65$ घंटे

इस प्रकार, 52 कि० मी०/घंटा की गति से समय लगेगा $=\frac{8\times 65}{52}$ घंटे

$=10$ घंटे

अतः, 52 कि० मी०/घंटा की गति से कार वापिसी की यात्रा 10 घंटे में तय करेगी।

समानुपात के अनेक प्रश्नों को **इकाई की विधि से** हल करना सम्भव है। हम नीचे कुछ उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 4 : यदि एक अमरीकन डालर 8 भारतीय रुपयों के बराबर हो तो, यह मानते हुए कि विनिमय दर में कमीशन की राशि सम्मिलित है, मोहन को 1500 रु० के बदले कितने अमरीकन डालर प्राप्त होंगे ? [प्रश्नावली 21.2 का प्रश्न 5 भी देखिए।]

हल : क्योंकि, 8 रु० $= 1$ अमरीकन डालर

अत:, 1 रु० $= \frac{1}{8}$ अमरीकन डालर

इस प्रकार, 1500 रु० $= \frac{1}{8} \times 1500 = 187.50$ अमरीकन डालर

दूसरे शब्दों में, मोहन को 1500 रु० के बदले 187.50 अमरीकन डालर प्राप्त होंगे ।

उदाहरण 5 : किसी वर्ष में एक छोटे शहर की जनसंख्या 10000 से बढ़कर 10300 हो गई । प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए । [प्रश्नावली 21.3 का प्रश्न 5 भी देखिए ।]

हल : वृद्धि $= 10300 - 10000 = 300$

10000 की जनसंख्या के लिए वृद्धि $= 300$

अत: 1 की जनसंख्या के लिए वृद्धि $= \frac{300}{10000} = \frac{3}{100}$

तथा, 100 की जनसंख्या के लिए वृद्धि $= \frac{3}{100} \times 100 = 3$

दूसरे शब्दों में, जनसंख्या में 3% की वृद्धि हुई ।

प्रश्नावली 21.6

1. एक कार 20 लीटर पैट्रोल से 180 कि० मी० की दूरी तय करती है । 32 लीटर पैट्रोल से वह कितनी दूरी तय करेगी ?
2. अंजु ने किसी परीक्षा में 75 में से 45 अंक प्राप्त किए । उसने कितने प्रतिशत अंक प्राप्त किए ?
3. एक स्कूटर 60 कि० मी० दूरी तय करने में कुल पैट्रोल का तीन बटा सात भाग व्यय करता है । शेष पैट्रोल से वह कितनी दूरी तय करेगा ?
4. एक राज 15 सें०मी० मोटी दीवार को 6 घंटे में बना सकता है । 10 सें०मी० मोटी दीवार को बनाने में उसे कितना समय लगेगा, यदि यह मान लिया जाए कि दीवार की लम्बाई, ऊँचाई, इत्यादि वही रहती हैं ?

5. एक दुकानदार 5000 रु० की बिक्री पर 350 रु० बिक्री कर के रूप में अदा करता है। यदि उसका बिक्री कर 435.05रु० हो तो उसकी बिक्री ज्ञात कीजिए।

6. 56 कि० मी०/घंटा की समान गति से चलती हुई एक रेलगाड़ी एक निश्चित दूरी को $8\frac{1}{4}$ घंटे में तय करती है। यदि रेलगाड़ी की वापिसी यात्रा में 7 घंटे लगते हैं तो उसकी गति ज्ञात कीजिए।

7. एक किसान अपने खेत का दो बटा पाँच भाग 4 दिन में जोत सकता है। उसे पूरा खेत जोतने में कितना समय लगेगा ?

8. यदि एक जायदाद के तीन बटा आठ भाग का मूल्य 21693 रु० है तो पूरी जायदाद का मूल्य निर्धारित कीजिए।

21.3 समय और काम, समय और दूरी

समय और काम तथा **समय और दूरी** के प्रश्नों में इकाई की विधि का रूचिपूर्ण अनुप्रयोग किया जा सकता है। हम मान लेते हैं कि **यदि एक व्यक्ति एक कार्य को, उदाहरणार्थ, 10 दिन में समाप्त कर सकता है तो वह उस कार्य के दसवें भाग को 1 दिन में करेगा। विलोमत: यदि वह एक कार्य के दसवें भाग को 1 दिन में करता है तो वह पूरे कार्य को 10 दिन में समाप्त करेगा।**

हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : एक मजदूर 39 मी० लम्बी एक खाई को 6 दिन में खोदता है। यह मानते हुए कि खाई की चौड़ाई और गहराई वही रहती हैं, वह 10 दिन में कितनी लम्बी खाई खोदेगा ?

हल : 6 दिन में मजदूर खोदता है $=39$ मी०

अत: 1 दिन में वह खोदेगा $=\frac{39}{6}$ मी०

तथा, 10 दिन में वह खोदेगा $=\frac{39}{6}\times 10=65$ मी०

दूसरे शब्दों में, मजदूर 10 दिन में 65 मी० लम्बी खाई खोदेगा।

उदाहरण 2 : A एक कार्य को 10 दिन में कर सकता है जबकि B उसी कार्य को 15 दिन में कर सकता है। यदि दोनों मिलकर कार्य करें तो उस कार्य को समाप्त करने में उन्हें कितना समय लगेगा ?

हल : क्योंकि A, 10 दिन में कार्य समाप्त कर सकता है,

अतः A का एक दिन का कार्य $=\frac{1}{10}$

इसी प्रकार, B का एक दिन का कार्य $=\frac{1}{15}$

अतः A और B का एक दिन का संयुक्त कार्य $=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$

अब, क्योंकि A और B एक दिन में $\frac{1}{6}$ कार्य को कर सकते हैं, अतः स्पष्ट है कि कार्य समाप्त करने में उन्हें 6 दिन लगेंगे।

उदाहरण 3 : 5 व्यक्ति एक कुएँ को 12 दिन में खोद सकते हैं। 12 व्यक्ति उस कुएँ को कितने दिन में खोदेंगे ?

हल : क्योंकि 5 व्यक्ति कुएँ को 12 दिन में खोद सकते हैं,

अतः 1 व्यक्ति उसे खोदेगा $=12\times5=60$ दिन में

अतः, 12 व्यक्ति खोदेंगे $=\frac{12\times5}{12}=5$ दिन में

दूसरे शब्दों में, 12 व्यक्ति कुएँ को 5 दिन में खोदेंगे।

उदाहरण 4 : A एक कार्य को 3 दिन में कर सकता है। B उसी कार्य को 6 दिन में और C, 10 दिन में कर सकता है। A ने कार्य आरम्भ किया परन्तु 2 दिन पश्चात् उसे कार्य को छोड़ना पड़ा। B और C दोनों को शेष कार्य समाप्त करने में कितना समय लगेगा ?

हल : क्योंकि A, 3 दिन में कार्य समाप्त कर सकता है,

अतः A का एक दिन का कार्य $=\frac{1}{3}$

तथा उसका 2 दिन का कार्य $=\frac{1}{3}\times2=\frac{2}{3}$

इस प्रकार, शेष कार्य $=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

अब, B उस कार्य को 6 दिन में कर सकता है।

अतः, B का एक दिन का कार्य $=\frac{1}{6}$

और C उस कार्य को 10 दिन में कर सकता है।

अतः, C का एक दिन का कार्य $=\frac{1}{10}$

इस प्रकार, B और C का एक दिन का संयुक्त कार्य $=\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{4}{15}$

अर्थात् B और C मिलकर कुल कार्य का $\frac{4}{15}$ भाग एक दिन में कर सकते हैं।

अतः वे दोनों पूरे कार्य को $\frac{15}{4}$ दिन में कर सकते हैं।

परन्तु शष कार्य $=\frac{1}{3}$

इस प्रकार, B और C शेष कार्य को $\frac{15}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$ दिन में कर सकते हैं।

उदाहरण 5 : एक व्यक्ति 40 कि० मी० / घंटा की समान गति से चलती हुई पैसेंजर गाड़ी से यात्रा करने की अपेक्षा 60 कि० मी० / घंटा की समान गति से चलती हुई एक्सप्रैस गाड़ी से 220 कि० मी० की दूरी तय करने में कितना समय बचाएगा ?

हल : एक्सप्रैस गाड़ी से,

60 कि० मी० की यात्रा करने में समय लगता है $=1$ घंटा

अतः 1 कि० मी० की यात्रा करने में समय लगेगा $=\frac{1}{60}$ घंटे

तथा 220 कि० मी० की यात्रा करने में समय लगेगा $=\frac{1}{60}\times 220=\frac{11}{3}$ घंटे

पैसेंजर गाड़ी से,

220 कि० मी० की यात्रा करने में समय लगेगा $=\frac{1}{40}\times 220=\frac{11}{2}$ घंटे

इस प्रकार, समय की बचत $=\frac{11}{2}-\frac{11}{3}=\frac{11}{6}=1$ घंटा 50 मिनट

दूसरे शब्दों में, एक्सप्रैस गाड़ी से यात्रा करने में वह व्यक्ति 1 घंटा 50 मिनट बचाएगा।

प्रश्नावली 21.7

1. एक आदमी एक कार्य को 7 दिन में कर सकता है। उसी कार्य को समाप्त करने में 9 आदमियों को कितना समय लगेगा ?

2. एक पुरुष एक कार्य को 3 घंटे में कर सकता है और एक स्त्री उसी कार्य को 4 घंटे में कर सकती है। यदि दोनों मिलकर उस कार्य को करें तो उन्हें कितना समय लगेगा ?

3. 8 घंटे प्रतिदिन कार्य करके एक राज एक दीवार को 7 दिन में बना सकता है। यदि उसे 6 घंटे प्रतिदिन कार्य करने के लिए कहा जाए तो वह उस दीवार को कितने दिन में बना पाएगा ?

4. A एक कार्य को 12 दिन में समाप्त कर सकता है जबकि A और B मिलकर उसी कार्य को 4 दिन में समाप्त कर सकते हैं। उस कार्य को समाप्त करने में अकेला B कितने दिन लगाएगा ?

5. यदि 35 व्यक्ति एक कार्य को 6 दिन में कर सकते हैं तो 15 व्यक्ति उस कार्य को कितने दिन में करेंगे ?

6. A एक कार्य को 20 दिन में और B उसी कार्य को 30 दिन में कर सकता है। यदि A और B मिलकर उस कार्य को करें तो कार्य समाप्त करने में उन्हें कितना समय लगेगा ?

7. A एक कार्य को 9 दिन में, *B* उस कार्य को 10 दिन में और C, 15 दिन में कर सकता है। B और C मिलकर कार्य आरम्भ करते हैं परन्तु 2 दिन के पश्चात् उन्हें कार्य बन्द करने को कहा जाता है। शेष कार्य को समाप्त करने में A को कितना समय लगेगा ?

8. रनबीर 15 कि० मी०/घंटा की गति से और सुरेन्द्र 12 कि० मी०/घंटा की गति से साइकिल चलाता है। दोनों प्रातः 8 बजे साइकिल चलाना आरम्भ करते हैं। दोपहर 12 बजे वे दोनों एक दूसरे से कितनी दूरी पर होंगे ?

***9.** एक चोर जो 8 कि० मी० / घंटा की गति से दौड़ सकता है उस समय एक सिपाही से 100 मीटर की दूरी पर है जबकि वह सिपाही उसका पीछा करना आरम्भ करता है। सिपाही 10 कि० मी०/घंटा की गति से दौड़ सकता है। सिपाही चोर को पकड़ने में कितना समय लगाएगा ?

सिपाही   चोर
|________ 100 मी०______|

[**संकेत :** मान लीजिए सिपाही चोर को पकड़ने में x घंटे का समय लगाता

है। तब, $8x+\frac{100}{1000}=10x$]

10. 55 कि० मी० / घंटा की गति से चलती हुई एक रेलगाड़ी 12 मिनट में कितनी दूरी तय करेगी ?

11. A प्रातः 8.30 बजे 6 कि० मी० / घंटा की समान गति से कार्यालय के लिए चलना आरम्भ करता है। A को एक संदेश देने के लिए B प्रातः 9 बजे 9 कि० मी० / घंटा की गति से A की ओर दौड़ना आरम्भ करता है। B किस समय A के पास पहुँचेगा ?

12. मान लीजिए कि समान गति से चलती हुई एक गाड़ी दिल्ली से अम्बाला तक की 210 कि० मी० की दूरी 2 घंटे 20 मिनट में तय करती है। दिल्ली से कुरुक्षेत्र तक की 160 कि० मी० की दूरी तय करने में गाड़ी कितना समय लगाएगी ?

21.4 औसत

आपने अपने दैनिक जीवन में प्रयोग होने वाले शब्द **औसत** (**average**) के विषय में सुना होगा। उदाहरणार्थ, आप समाचारों में **किसी क्षेत्र में औसत दैनिक वर्षा** के विषय में सुनते हैं। आपका अध्यापक आपकी कक्षा की परीक्षा लेता है। आपकी उत्तर-पुस्तिकाएँ लौटाते समय वह **परीक्षा में प्राप्त औसत अंकों की** घोषणा करता है। क्या आप कुछ और स्थितियों के विषय में सोच सकते हैं, जहाँ आपके सम्मुख औसत आते हैं ?

औसत की संकल्पना वास्तव में अति सरल है। **संख्याओं के दिए हुए किसी समुच्चय का औसत ज्ञात करने के लिए हमें केवल सब संख्याओं का योग प्राप्त करके उसे उनकी संख्या से भाग देना होता है। प्रायः हम औसत को M से व्यक्त करते हैं।**

आइए निम्न उदाहरण पर विचार करें :

उदाहरण 1 : एक फल विक्रेता की 10 क्रमागत दिनों की बिक्री (रुपयों में) निम्नलिखित है :

150, 160, 170, 165, 153, 127, 145, 151, 139, 140

उसकी औसत दैनिक बिक्री निर्धारित कीजिए।

हल : उसकी 10 दिन की कुल बिक्री निम्न है :

$$150+160+170+165+153+127+145+151+139+140$$
$$=1500$$

$$\text{औसत दैनिक बिक्री} = \frac{\text{योग}}{\text{दिनों की संख्या}} = \frac{1500}{10}$$
$$=150$$

इस प्रकार, फल विक्रेता की औसत दैनिक बिक्री 150 रु० है।

उदाहरण 2 : गणित की छः मासिक परीक्षाओं में अनिता द्वारा प्राप्त अंक (100 में से) निम्नलिखित हैं :

70, 65, 70, 52, 85, 90

उसके औसत मासिक अंक परिकलित कीजिए।

हल : औसत ज्ञात करने के लिए हमें केवल सभी अंकों का योग ज्ञात करके उन्हें परीक्षाओं की संख्या अर्थात् 6 से भाग देना है।

$$\text{इस प्रकार, औसत} = \frac{70+65+70+52+85+90}{6}$$

$$=\frac{432}{6}=72$$

अतः, अनिता के औसत मासिक अंक (100 में से) 72 हैं।

उदाहरण 3 : दिल्ली में अगस्त 1978 के 10 क्रमागत दिनों का दैनिक अधिकतम तापमान (°C में) निम्नलिखित है :

30.7, 28.4, 33.3, 33.4, 30.5, 34.0, 34.0, 39.9, 27.4, 32.0

औसत दैनिक अधिकतम तापमान ज्ञात कीजिए।

हल : हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$M=\frac{30.7+28.4+33.3+33.4+30.5+34.0+34.0+39.9+27.4+32.0}{10}$$

$$=\frac{323.6}{10}=32.36$$

इस प्रकार दिल्ली में अगस्त 1978 के 10 क्रमागत दिनों का औसत दैनिक अधिकतम तापमान 32.36°C है।

उदाहरण 4 : हरियाणा के किसी विद्यालय में 15 पुरुष अध्यापकों और 9 महिला अध्यापकों की आयु (वर्षों में) निम्नलिखित है :

पुरुष : 36, 28, 42, 33, 29, 21, 34, 28, 36, 29, 39, 40, 22, 45, 48

महिला : 37, 25, 28, 20, 31, 30, 34, 38, 27

उनकी औसत आयु ज्ञात कीजिए।

हल : पुरुष अध्यापक की औसत आयु निम्नलिखित है :

$$\frac{36+28+42+33+29+21+34+28+36+29+39+40+22+45+48}{15}$$

$$=\frac{510}{15}=34$$

महिला अध्यापक की औसत आयु निम्नलिखित है :

$$\frac{37+25+28+20+31+30+34+38+27}{9}$$

$$=\frac{270}{9}=30$$

इस प्रकार, हरियाणा के विद्यालय में पुरुष अध्यापक की औसत आयु 34 वर्ष जबकि महिला अध्यापक की औसत आयु 30 वर्ष है।

क्या आप इस तुलना से कोई निष्कर्ष निकाल सकते हैं ?

***उदाहरण 5 :** छः संख्याओं का औसत 12 है। इनमें से किन्हीं पाँच संख्याओं का औसत 11 है। छठी संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : आइए छः संख्याओं के औसत को M से व्यक्त करें। तब, M=12

साथ ही, $M=\frac{\text{छः संख्याओं का योग}}{6}$

अर्थात्, $12=\frac{\text{छः संख्याओं का योग}}{6}$

इस प्रकार, छः संख्याओं का योग $12\times6=72$ है।

चूँकि किन्हीं पाँच संख्याओं का औसत 11 है, अतः यह स्पष्ट है कि इन पाँच संख्याओं का योग $11\times5=55$ है।

अत:, छठी संख्या $=72-55=17$

***उदाहरण 6 :** दस संख्याओं का औसत 6 है। यह मानते हुए कि ग्यारहवीं संख्या -5 है, ग्यारह संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि दस संख्याओं का औसत 6 है, अत:

दस संख्याओं का योग $=10\times 6=60$

ग्यारहवीं संख्या $=-5$

इस प्रकार ग्यारह संख्याओं का योग = दस संख्याओं का योग + ग्यारहवीं संख्या

$$=60+(-5)$$

$$=55$$

अत: ग्यारह संख्याओं का औसत $=\frac{55}{11}=5$

प्रश्नावली 21.8

1. किसी परीक्षा में 27 विद्यार्थियों के अंक (50 में से) निम्नलिखित हैं :

37, 26, 41, 25, 28, 39, 29, 35, 48, 20, 33, 16, 40, 43, 38, 32, 44, 49, 27, 37, 19, 35, 31, 42, 18, 38, 48

औसत अंक ज्ञात कीजिए।

2. एक दुकानदार का दैनिक लाभ (रुपयों में) निम्नलिखित है :

24, 29, 25, 28, 34, 31, 32

उसका औसत दैनिक लाभ परिकलित कीजिए।

3. पालिश करने वाला एक लड़का किसी महीने के 15 क्रमागत दिनों में निम्नलिखित राशि (रुपयों में) कमाता है :

8, 9, 7.50, 7, 8.50, 11, 9, 6, 8.50, 8, 10, 10, 9, 9, 7

उसकी औसत दैनिक आय परिकलित कीजिए।

4. किसी कक्षा के 16 लड़कों की ऊँचाइयाँ (सें०मी० में) निम्नलिखित हैं :

146, 141, 150, 152, 139, 158, 143, 155
147, 142, 156, 150, 160, 158, 156, 147

कक्षा में एक लड़के की औसत ऊँचाई कितनी है ?

5. किसी अस्पताल में 25 नवजात शिशुओं के भार (कि० ग्रा० में) नीचे दिए गए हैं :

2.65, 3.40, 3.00, 2.75, 3.15, 3.00, 3.10,
2.80, 2.70, 3.25, 2.40, 3.30, 3.20, 3.35,
3.20, 3.00, 2.75, 3.00, 2.85, 3.50, 3.00,
2.90, 2.80, 3.00, 2.95

एक नवजात शिशु का औसत भार निर्धारित कीजिए।

6. एक टेलीफून एक्सचेंज में जुलाई 1978 के किसी सप्ताह में प्रातः 10 बजे से प्रातः 11 बजे तक आने वाले टेलीफूनों की संख्या निम्नलिखित है :

सोमवार : 390 मंगलवार : 375 बुधवार : 351
बृहस्पतिवार : 333 शुक्रवार : 384 शनिवार : 322
रविवार : 260

प्रति दिन आने वाले टेलीफूनों की औसत संख्या परिकलित कीजिए।

7. अगस्त 1974 में 10 क्रमागत दिनों का कुल वाष्पीकरण (मि० मी० में) नीचे दिया गया है :

4.3, 3.2, 2.1, 3.0, 2.4, 5.0, 4.6, 3.3, 1.2, 3.0

औसत दैनिक वाष्पीकरण ज्ञात कीजिए।

8. दिल्ली में अगस्त 1978 के 10 क्रमागत दिनों का दैनिक न्यूनतम तापमान (°C में) निम्नलिखित है :

26.2, 26.2, 26.5, 25.3, 25.7, 26.5,
27.4, 26.1, 24.1, 24.1

औसत दैनिक न्यूनतम तापमान ज्ञात कीजिए।

9. फरवरी 1978 में किसी प्राइमरी स्कूल में अनुपस्थित विद्यार्थियों की संख्या निम्नलिखित है :

12, 15, 18, 13, 6, 0, 13, 14, 12, 12, 10,

11, 14, 9, 14, 8, 10, 10, 7, 11, 10, 15, 12, 8

दैनिक अनुपस्थित विद्यार्थियों की औसत संख्या परिकलित कीजिए।

10. किसी कक्षा में 21 विद्यार्थियों की आयु (वर्षों और महीनों में) नीचे दी गई है :

13-3, 14-0, 13-8, 14-1, 14-0, 13-9,
13-4, 13-8, 14-2, 13-1, 14-1, 14-2,
13-9, 14-0, 13-7, 14-1, 14-4, 13-2,
13-8, 13-8, 13-3

एक विद्यार्थी की औसत आयु ज्ञात कीजिए।

11. एक बस दिल्ली से कुरुक्षेत्र की 160 कि॰ मी॰ की दूरी 3 घण्टे 12 मिनट में तय करती है। बस की औसत गति परिकलित कीजिए।

***12.** पाँच संख्याओं का औसत 21 है। यह मानते हुए कि छठी संख्या 33 है, इन छः संख्याओं का औसत परिकलित कीजिए।

13. आठ संख्याओं का औसत 12 है। नवीं संख्या को सम्मिलित करने से औसत 13 हो जाता है। नवीं संख्या निर्धारित कीजिए।

***14.** बीस संख्याओं का औसत 4 है। इनमें से किन्हीं उन्नीस संख्याओं का औसत 5 है। बीसवीं संख्या निर्धारित कीजिए।

***15.** (क) पहले तीन धनपूर्णांकों का औसत ज्ञात कीजिए।

(ख) पहले चार धनपूर्णांकों का औसत ज्ञात कीजिए।

(ग) पहले पाँच धनपूर्णांकों का औसत ज्ञात कीजिए।

(घ) क्या अब आप पहले छः धनपूर्णांकों के औसत का अनुमान लगा सकते हैं ? आप क्या देखते हैं ?

[हम देखते हैं कि पहले n धनपूर्णांकों का औसत $\frac{n+1}{2}$ है।]

एकक XXII

सांख्यिकीय आँकड़े और उनका निरूपण

इस एकक में यह हम सीखेंगे कि सांख्यिकीय आँकड़ों का चित्रीय निरूपण किस प्रकार किया जाता है।

22.1 भूमिका

आज के युग में अपनी प्रत्येक व्यावहारिक गति विधि में हमारा सांख्यिकीय आँकड़ों से सामना होता है। हम एक समाचार पत्र देखते हैं, और उदाहरणार्थ, एक **सारणी** प्राप्त करते हैं, जिसमें वार्षिक रेल दुर्घटनाओं की संख्या उनकी प्रकारों (**type**) के अनुसार दर्शाई होती है। हम कोई साप्ताहिक पत्र देखते हैं और, उदाहरणार्थ, एक **दण्ड चार्ट** (**bar chart**) प्राप्त करते हैं जिसमें अनेक वर्षों के लिए भारत के आयात और निर्यात दर्शाए होते हैं। फिर हम कोई अन्य पत्रिका देखते हैं और एक **वृत्त-चार्ट** (**pie-chart**) प्राप्त करते हैं जिसमें यह दर्शाया होता है कि संसद के अधिवेशनों में कितने संसद सदस्यों ने कितनी बार बोला है। हम अपनी कक्षा में जाते हैं। अध्यापक श्याम पट (black board) पर एक **सारणी** लिखता है जिसमें यह दर्शाया होता है कि उसके द्वारा ली गई एक परीक्षा में 40% से कम, 40% से 60% के बीच और 60% से अधिक अंक कितने विद्यार्थियों ने प्राप्त किए हैं।

संख्यात्मक आँकड़ों की मुख्य विशेषताओं को सामने लाने में सारणियाँ, दण्ड चार्ट, वृत्त-चार्ट अति उपयोगी होते हैं। अगले अनुच्छेदों में हम संख्यात्मक आँकड़ों के कुछ चित्रीय निरूपणों पर विचार करेंगे।

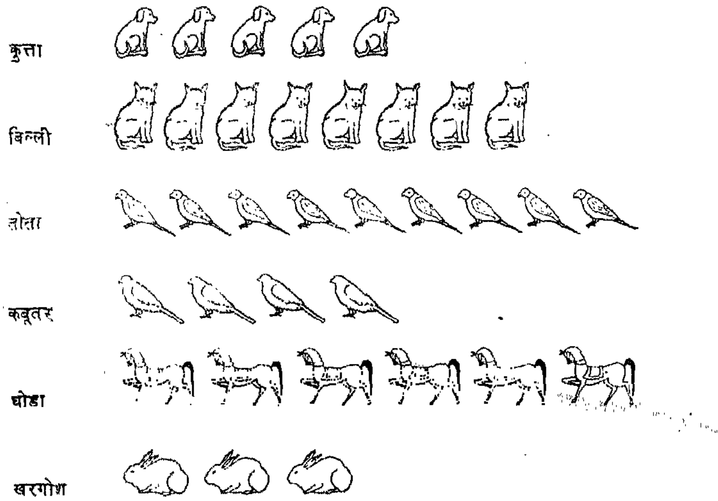
22.2 चित्रीय निरूपणः चित्रालेख

आइए निम्न उदाहरणों का अध्ययन करें।

उदाहरण 1 : एक अध्यापक* 35 विद्यार्थियों की एक कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी से अपने मनपसन्द पशु अथवा पक्षी का नाम लिखने को कहता है। निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होते हैं :

कुत्ता	बिल्ली	तोता	कबूतर	घोड़ा	खरगोश
5	8	9	4	6	3

उपरोक्त आँकड़ों को आकर्षक रूप से निरूपित करने के लिए एक **चित्रालेख** (**pictograph**) खींचा जा सकता है। हम चिन्हों के बीच समान दूरी रखते हैं और एक चित्रालेख प्राप्त करते हैं जैसा कि आकृति 22.1 में दिखाया गया है।



आकृति 22.1

चित्रालेख द्वारा कुछ मुख्य विशेषताएँ तुरन्त सामने आ जाती हैं। क्या आप बता सकते हैं कि 35 विद्यार्थियों की इस कक्षा में सबसे अधिक मनपसन्द पशु अथवा

***अध्यापक के लिए टिप्पणी (कक्षा के क्रिया-कलाप के लिए सुझाव)**

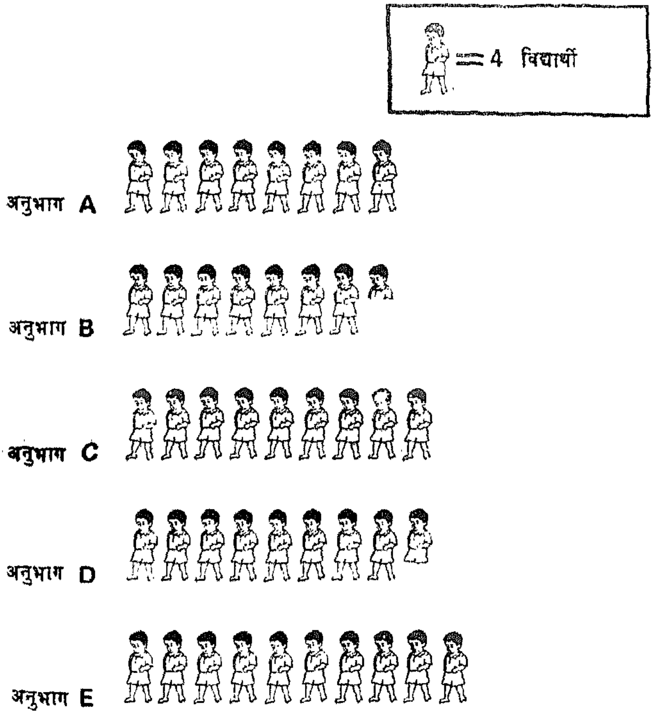
अपनी कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी से कहिए कि वे अपनी मनपसन्द पशु अथवा पक्षी का नाम लिखें। उपरोक्त रूप से एक बंटन बनाइए और बच्चों से चित्रालेख बनवाइए।

पक्षी कौन सा है ? और सबसे कम मनपसन्द कौन सा है ?

यहाँ हमने एक पशु अथवा पक्षी को निरूपित करने के लिए एक चिन्ह का प्रयोग किया है। **जब संख्याएँ बहुत बड़ी होती हैं तो यह वाँछित होता है कि एक चिन्ह द्वारा एक से अधिक व्यक्ति या वस्तु को निरूपित किया जाय।** हम निम्न उदाहरण लेते हैं :

उदाहरण 2 : कक्षा VII के पाँच अनुभागों में अगस्त 1978 के किसी दिन विद्यालय में उपस्थित होने वाले विद्यार्थियों की संख्या नीचे दी गई है :

अनुभाग	A	B	C	D	E
उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या	32	30	36	35	40



आकृति 22.2

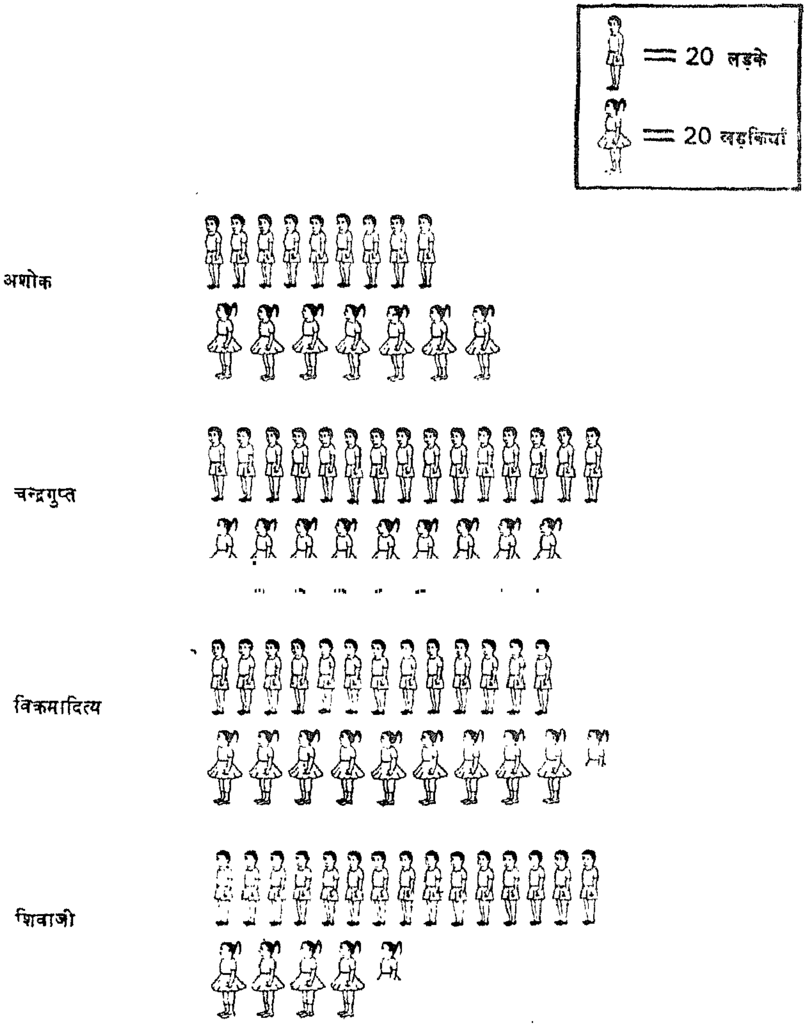
मान लीजिए कि हम एक चिन्ह द्वारा, उदाहरणार्थ, 4 विद्यार्थियों को निरूपित करते हैं। तब हम एक चित्रालेख प्राप्त करते हैं जैसा कि आकृति 22.2 में दिखाया गया है।

ऐसे चित्रालेखों, जिनमें आंशिक चिन्हों का प्रयोग होता है, को पढ़ना कुछ कठिन होता है।

उदाहरण 3 : किसी विद्यालय में चार हाऊस (house) हैं। प्रत्येक हाऊस में लड़के और लड़कियों की संख्या नीचे दी गई है :

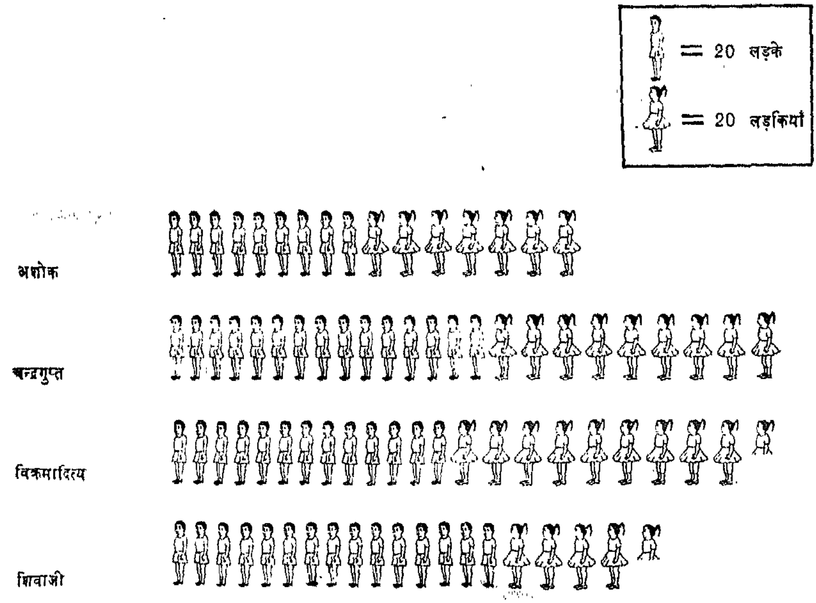
हाऊस	लड़कों की संख्या	लड़कियों की संख्या
अशोक	180	140
चन्द्रगुप्त	300	130
विक्रमादित्य	260	190
शिवाजी	300	90

उपरोक्त आँकड़ों को एक चित्रालेख द्वारा निरूपित करने के लिए हमें दो चिन्हों की आवश्यकता है—एक लड़कों के लिए और दूसरा लड़कियों के लिए। हम मान लेते हैं कि लड़के का एक चिन्ह, उदाहरणार्थ, 20 लड़कों को और लड़की का एक चिन्ह 20 लड़कियों को निरूपित करता है। हमें एक चित्रालेख प्राप्त होता है जैसाकि आकृति 22.3 में दिखाया गया है।



आकृति 22.3

हमें लड़कों और लड़कियों के चिन्हों को अलग-अलग पंक्तियों में रखने की आवश्यकता नहीं है। हम निम्न चित्रालेख भी बना सकते हैं जैसा कि आकृति 22.4 में नीचे दिखाया गया है :



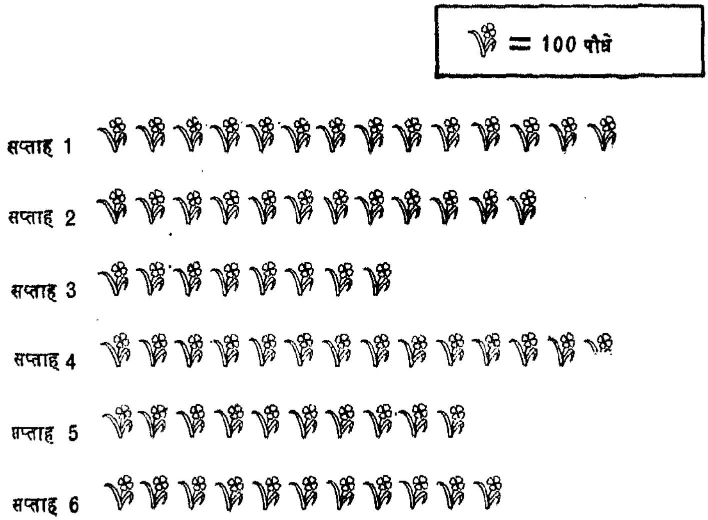
आकृति 22.4

उदाहरण 4 : (चित्रालेख को पढ़ना) एक किसान द्वारा लगातार 6 सप्ताहों में लगाए गए पौधों की संख्या आकृति 22.5 में दी गई है।

(क) किसान ने प्रत्येक सप्ताह कितने पौधे लगाए ?

(ख) किसान ने छः सप्ताहों में कुल कितने पौधे लगाए ?

(ग) किस सप्ताह उसने सबसे अधिक पौधे लगाए ? किस सप्ताह सबसे कम ?



आकृति 22.5

हल : चूंकि पौधे का प्रत्येक चिन्ह 100 पौधों को निरूपित करता है, अतः हम चित्रालेख में प्रत्येक सप्ताह के चिन्हों की गणना करते हैं।

(क) अतः हम प्रत्येक सप्ताह में लगाए गए पौधों की संख्या के विषय में निम्न सूचना प्राप्त करते हैं :

सप्ताह	1	2	3	4	5	6
पौधों की संख्या	1400	1200	800	1350	1000	1100

(ख) स्पष्ट रूप से किसान द्वारा लगाए गए कुल पौधों की संख्या $1400+1200+800+1350+1000+1100=6850$ है।

(ग) सप्ताह 1 में किसान ने सबसे अधिक पौधे अर्थात् 1400 पौधे लगाए।
सप्ताह 3 में उसने सबसे कम पौधे अर्थात् 800 पौधे लगाए।

प्रश्नावली 22.1

1. किसी दुकानदार द्वारा किसी सप्ताह में बेची गई ट्राइसकिलों (तीन पहियों वाली साइकिलों) की संख्या निम्न है :

सोमवार	मंगलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार
16	18	16	20	10	15

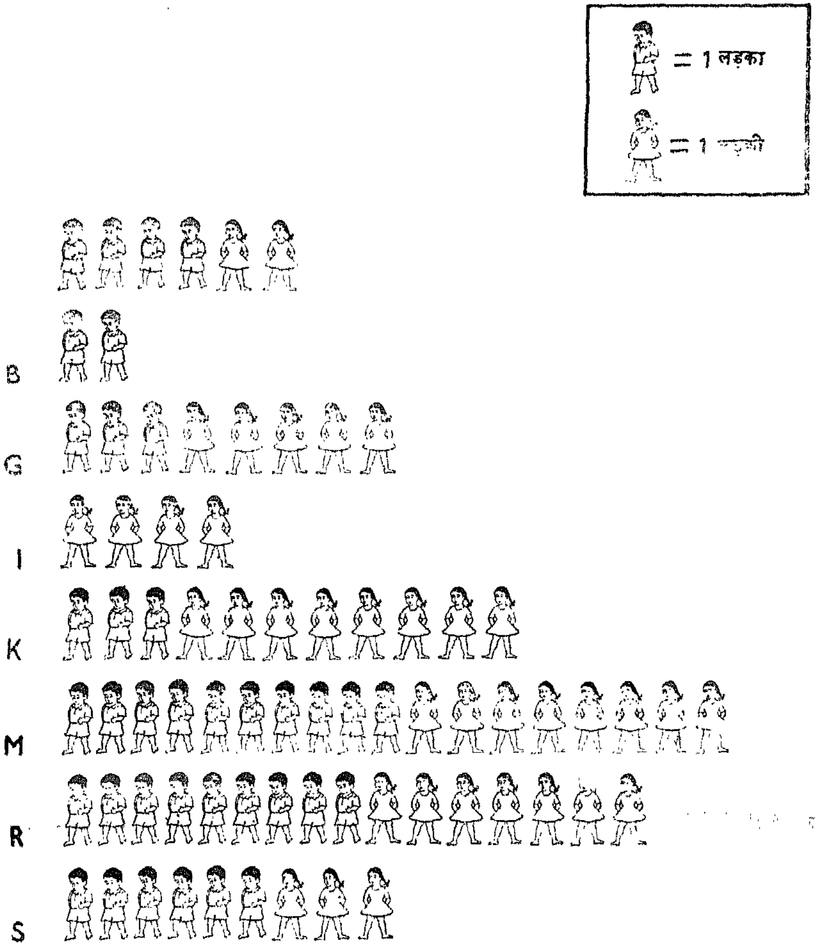
एक ट्राइसकिल को निरूपित करने के लिए एक चिन्ह का प्रयोग करते हुए एक चित्रालेख बनाइए।

2. रविवार की एक सुबह मदन 8 बजे से 12 बजे तक के बीच अपने घर के सामने से गुजरते हुए वाहनों की संख्या लिखता है। वह निम्न सूचना प्राप्त करता है :

कारें	42
बसें	28
जीपें	8
ट्रक	35
आटो रिक्शा	25
साइकिलें	17

उपर्युक्त सूचना को निरूपित करने के लिए एक चित्रालेख बनाइए।

* 3. आकृति 22.6 में किसी विद्यालय की कक्षा IX और X के विद्यार्थियों की उनके पहले नामों के पहले अक्षरों के अनुसार संख्या दर्शाई गई है।



आकृति 22.6

(क) कौन सा अक्षर सबसे अधिक बार आता है ?

(ख) कितनी लड़कियों के पहले नामों में पहला अक्षर G है ?

(ग) कितने लड़कों के पहले नामों में पहला अक्षर R है ?

(घ) उपरोक्त सूचना को निम्न सारणी के रूप में निरूपित कीजिए :

पहले नाम का पहला अक्षर	लड़कों की संख्या	लड़कियों की संख्या	योग
A			
B			
G			
I			
K			
M			
R			
S			

4. एक सप्ताह के लगातार 6 दिनों में एक दुकानदार द्वारा बेचे गए बल्बों की संख्या नीचे दी गई है :

दिन	1	2	3	4	5	6
बेचे गए बल्बों की संख्या	48	36	42	0	108	30

उपरोक्त सूचना को एक चित्रालेख द्वारा निरूपित कीजिए।

5. चार भिन्न वर्षों में गणतंत्र दिवस की परेड में भाग लेने वाले एक विद्यालय

के विद्यार्थियों की संख्या नीचे दी गई है :

वर्ष	लड़कों की संख्या	लड़कियों की संख्या
1974	35	30
1975	30	37
1976	28	35
1977	33	24

उपरोक्त सूचना को एक चित्रालेख द्वारा निरूपित कीजिए।

6. पाँच भिन्न वर्षों में भारत के प्राथमिक/जूनियर बेसिक विद्यालयों की संख्या नीचे दी गई है :

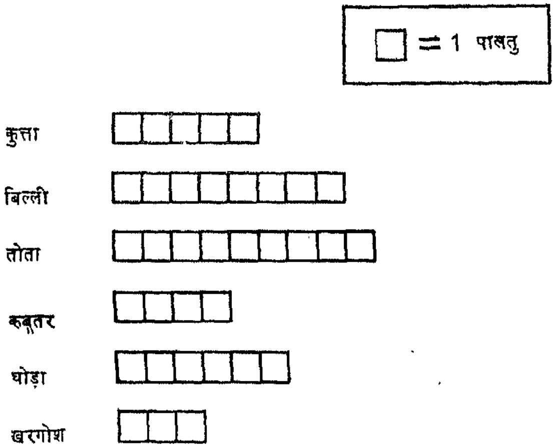
वर्ष	1950–51	1955–56	1960–61	1965–66	1973–74
प्राथमिक/जूनियर बेसिक विद्यालयों की संख्या (हज़ार में)	210	278	230	391	430

उपरोक्त सूचना को एक चित्रालेख द्वारा निरूपित कीजिए।

22.3 चित्रीय निरूपण—दण्ड चार्ट अथवा दण्ड आलेख

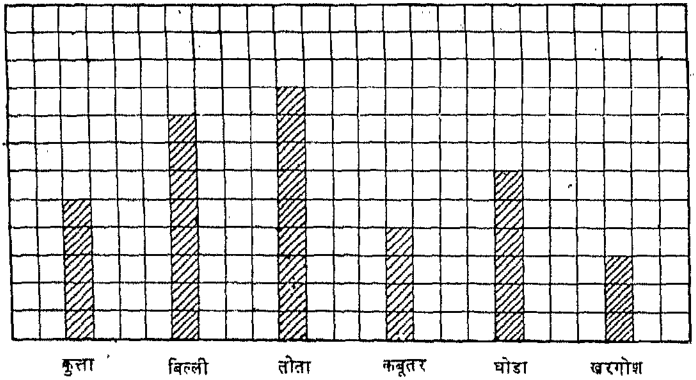
चित्र बनाने में हर कोई अच्छा नहीं होता। चित्रीय निरूपण की एक अन्य विधि जो चित्रालेखों से सरल होती है, **दण्ड चार्ट (bar charts)** अथवा **दण्ड आलेख (bar graphs)** बनाने की है। **एक चित्रीय चिन्ह की अपेक्षा किसी व्यक्ति या वस्तु को निरूपित करने के लिए हम एक वर्ग (square) का प्रयोग करते हैं।** आइए अनुच्छेद 22.2 के उदाहरण 1 पर पुन: विचार करें। हम वर्ग के एक चिन्ह द्वारा एक पालतु पशु या पक्षी को निरूपित करते हैं। इससे हमें

निम्न चित्रीय निरूपण प्राप्त होता है :



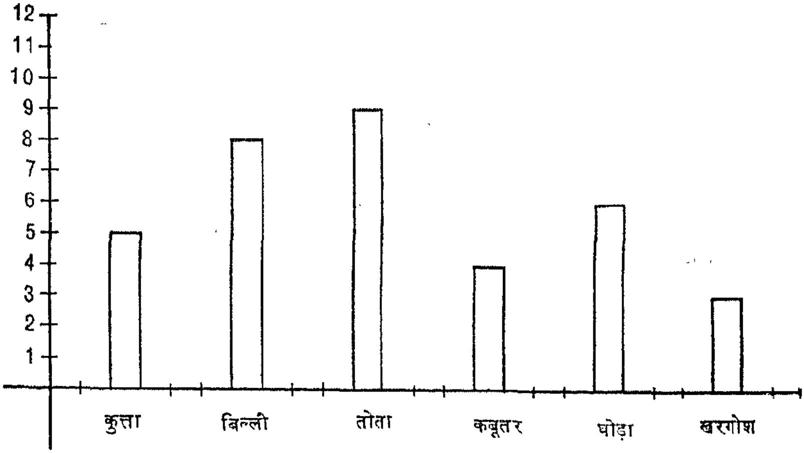
आकृति 22.7

इस निरूपण को **दण्ड चार्ट** अथवा **दण्ड आलेख** कहा जाता है। **दण्ड चार्टों** को क्षैतिज रूप से जैसा कि आकृति 22.7 में दिखाया गया है अथवा जैसी कि प्रथा है, ऊर्ध्वाधर स्तम्भों (vertical columns) में जैसा कि आकृति 22.8 अथवा आकृति 22.9 में दिखाया गया है खींचा जा सकता है।



आकृति 22.8

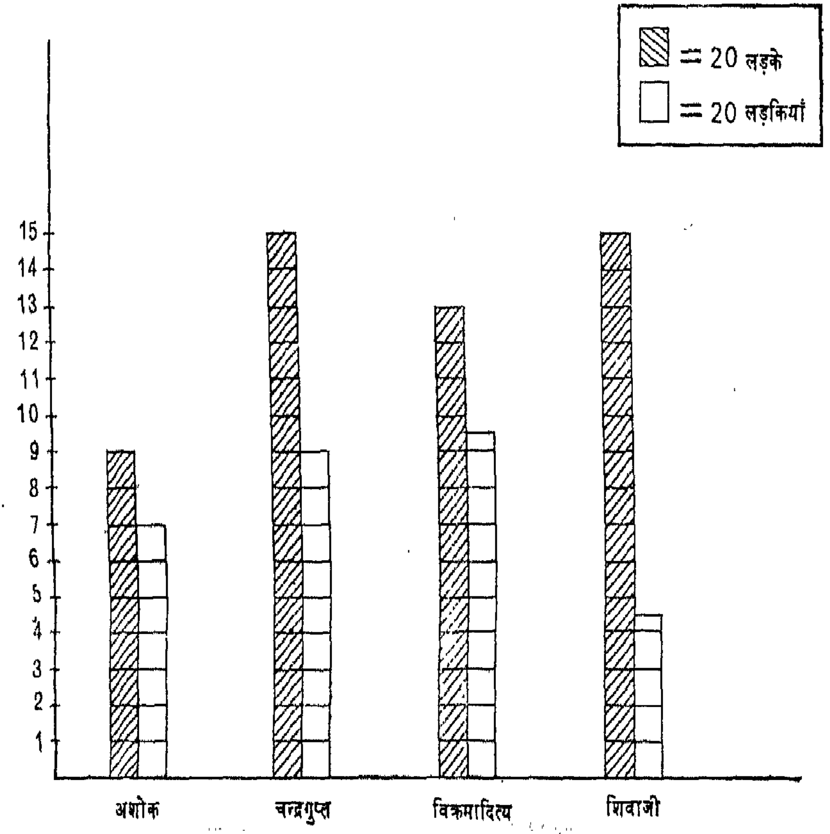
आकृति 22.8 में, चूँकि एक ग्राफ पेपर का प्रयोग किया है, अतः प्रत्येक पालतु पशु या पक्षी की संख्या निर्धारित करने के लिए हम सरलता से प्रत्येक आयत में वर्गों की संख्या की गणना कर सकते हैं। जब ग्राफ़ पेपर का प्रयोग नहीं किया जाता तो ऊर्ध्वाधर अक्ष के अनुदिश पैमाना (scale) दिखाया जाता है। इस प्रकार हम एक दण्ड चार्ट प्राप्त करते हैं जैसा कि आकृति 22.9 में दिखाया गया है।



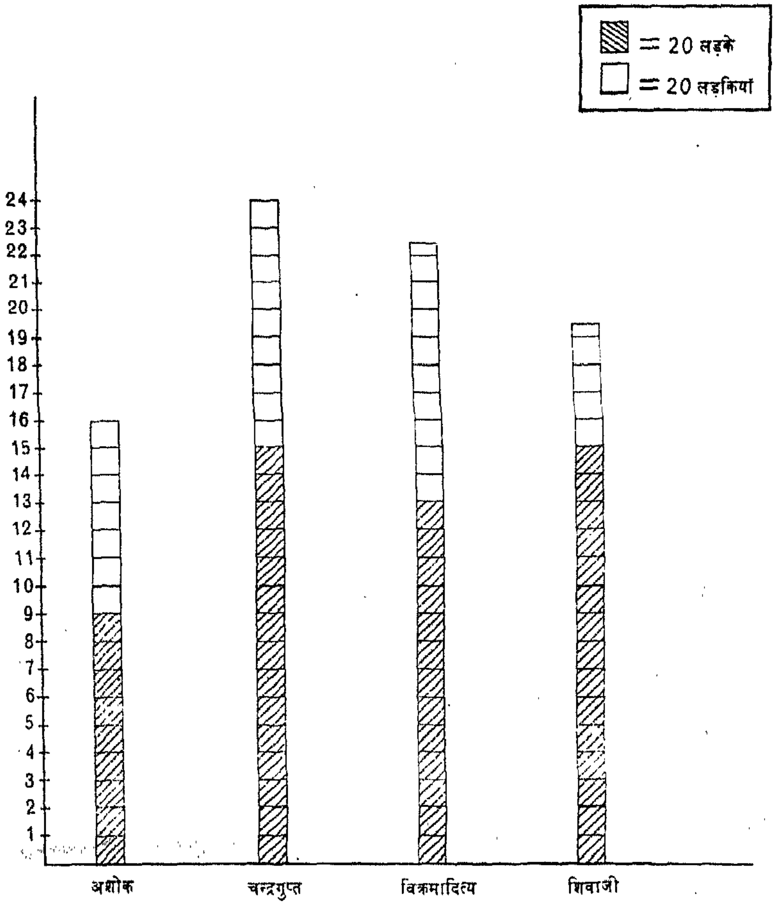
आकृति 22.9

अनुच्छेद 22.2 के उदाहरण 3 के लिए हम एक दण्ड आलेख किस प्रकार बनाएँगे ? हमें पुनः दो चिन्हों की आवश्यकता है—एक लड़कों को निरूपित करने के लिए और दूसरा लड़कियों को निरूपित करने के लिए। चूँकि हम दण्डों (अथवा आयतों) को प्राप्त करना चाहते हैं, अतः हम एक चिन्ह को छायांकित कर (रंग भर) देते हैं और दूसरे चिन्ह को वैसे ही छोड़ देते हैं। उदाहरण 3 में

दी गई सूचना के लिए हम निम्न दण्ड आलेख प्राप्त करते हैं। (देखिए आकृति 22.10 और आकृति 22.11)



आकृति 22.10



आकृति 22.11

प्रश्नावली 22.2

1. अनुच्छेद 22.2 के उदाहरण **2** में दी गई सूचना को निरूपित करने के लिए एक दण्ड चार्ट बनाइए।

2. भारत में 7 भिन्न वर्षों में सार्वजनिक संस्थानों की संख्या नीचे दी गई है :

वर्ष	1951	1956	1961	1966	1969	1974	1977
सार्वजनिक संस्थानों की संख्या	5	21	48	74	85	122	145

उपरोक्त सूचना को निरूपित करने के लिए एक दण्ड चार्ट बनाइए।

*3. निम्नलिखित सूचना को निरूपित करने के लिए एक दण्ड चार्ट बनाइए :

वर्ष	1952	1957	1962	1967	1971	1977
महिला संसद सदस्यों की संख्या	22	27	34	31	22	19

*4. निम्न 5 वर्षों के लिए भारत के आयात और निर्यात को निरूपित करने के लिए एक दण्ड आलेख बनाइए :

वर्ष	1972-73	1973-74	1974-75	1975-76	1976-77
आयात (सौ करोड़ रुपयों में)	19	30	45	53	51
निर्यात (सौ करोड़ रुपयों में)	20	25	33	40	51

5. भिन्न-भिन्न वर्षों में सड़क दुर्घटनाओं की संख्या उनके घटित होने के वर्ष सहित नीचे दी गई है :

वर्ष	1970	1971	1972	1973	1974
सड़क दुर्घटनाओं की संख्या (हजार में)	107	97	98	99	79

एक दण्ड चार्ट बनाइए।

6. निम्नलिखित सूचना को निरूपित करने के लिए एक दण्ड आलेख बनाइए :

वर्ष	1969-70	1970-71	1971-72	1972-73	1973-74
भारतीय रेल द्वारा तय की गई दूरी (मिलियन कि० मी० में)	473	467	474	473	433

7. प्रश्नावली 22.1 के प्रश्न 1 में दी गई सूचना को निरूपित करने के लिए एक दण्ड चार्ट बनाइए।

8. प्रश्नावली 22.1 के प्रश्न 2 में दी गई सूचना को निरूपित करने के लिए एक दण्ड आलेख बनाइए।

9. (कक्षा में क्रिया-कलाप के लिए सुझाव)

विद्यालय के खेल के मैदान में 100 मीटर की दूरी चिन्हित कीजिए। अपनी कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी से कहिए कि वह 100 मीटर चले और लगाए गए समय को लिख ले। इस सूचना को निरूपित करने के लिए विद्यार्थियों से दण्ड चार्ट बनवाइए।

10. प्रश्नावली 22.1 के प्रश्न 4 में दिए गए आँकड़ों को निरूपित करने के लिए एक दण्ड आलेख खींचिए।

11. प्रश्नावली 22.1 के प्रश्न 5 में दी गई सूचना को एक दण्ड चार्ट द्वारा निरूपित कीजिए।

12. (कक्षा में क्रिया-कलाप के लिए सुझाव)

अपनी कक्षा के पाँच विद्यार्थियों से कहिए कि वे अपने पाँच मित्रों की प्रति मिनट नाड़ी की गति (pulse-beat) को गिनें। इस प्रकार प्रत्येक को जो सूचना प्राप्त होती है उसे निरूपित करने के लिए उनसे दण्ड आलेख बनवाइए।

मुख्य संकल्पनाएँ

चित्रालेख — दण्ड चार्ट

परिशिष्ट IV

कुछ महत्वपूर्ण सूत्र

[कोष्ठकों के अंदर पृष्ठ संख्याएँ दी गई हैं। सभी अक्षरों के सामान्य अर्थ हैं।]

1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ (25)
2. $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$ (39)
3. $\frac{a}{b}\times\left[\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right]=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}$ (46)
4. $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ (53)
5. $b^m\times b^n=b^{m+n}$ (174)
6. $\frac{b^m}{b^n}=b^{m-n}=\frac{1}{b^{n-m}}$ (177, 179)
7. $(b^m)^n=b^{mn}$ (183)
8. $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ (187)
9. $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$ (187)
10. $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ (192)
11. $(ax+by)(cx+dy)=acx^2+bdy^2+(ad+bc)xy$ (193)
12. **°C से °F में परिवर्तन**

$$C=\frac{5}{9}(F-32)$$ (211)

13. वर्ग की परिमाप
$$P=4l \qquad (215)$$
14. घनाभ का आयतन
$$V=lbh \qquad (216)$$
15. त्रिभुज का क्षेत्रफल
$$A=\frac{1}{2}\,bh \qquad (216)$$
16. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x\,(x+1)+\frac{1}{4}$ (217)
17. प्रथम n धनपूर्णांकों का योग
$$S=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (217)$$
18. वृत्त का क्षेत्रफल
$$A=\pi r^2 \qquad (218)$$
19. वृत्त की परिधि
$$C=2\pi r \qquad (218)$$
20. आयत का क्षेत्रफल
$$A=l\times b \qquad (323)$$
21. वर्ग का क्षेत्रफल
$$A=l^2 \qquad (323)$$
22. समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल
$$A=b\times h \qquad (327)$$
23. समलंब का क्षेत्रफल
$$A=\frac{1}{2}\,(a+b)\,h \qquad (330)$$
24. साधारण ब्याज
$$I=prt \qquad (369)$$

परिशिष्ट V

SYLLABUS FOR CLASS VII

UNIT I : RATIONAL NUMBERS

The need for rational numbers; to divide a line segment into a given number of equal segments; representation of rational numbers on a number line.

UNIT II : ADDITION AND SUBTRACTION OF RATIONAL NUMBERS

Positive and negative rationals; addition of rational numbers; the negative of a rational number; subtraction of rational numbers.

UNIT III : MULTIPLICATION AND DIVISION OF RATIONAL NUMBERS

Multiplication of rational numbers; the distributive property of rational numbers; reciprocal of a rational number; division of rational numbers; ordering of rationals; absolute value; the property that between any two (distinct) rationals there exists another rational.

UNIT IV : ARITHMETIC OF DECIMALS

Review of the concepts related to arithmetic of decimals learnt in earlier classes.

UNIT V : DECIMAL REPRESENTATION OF RATIONAL NUMBERS

Decimal representation of positive rational numbers; the 'why' of long division; terminating or non-terminating repeating decimals; decimal representation of negative rational numbers; decimal representation through a number line.

UNIT VI : ALGEBRAIC EXPRESSIONS WITH RATIONAL COEFFICIENTS

Algebraic expressions with rational coefficients; degree of a polynomial; addition and subtraction of polynomials; finding the value of an algebraic expression; zero of a polynomial.

UNIT VII : FIRST DEGREE EQUATIONS IN ONE VARIABLE

Equations with rational coefficients; solving an equation; use of equations to solve problems; decimals as rational numbers.

UNIT VIII : INEQUALITIES AND FIRST DEGREE INEQUATIONS IN ONE VARIABLE

Inequalities; properties of inequalities; inequations; solving an inequation.

UNIT IX : EXPONENTS

Exponential notation; practice to be given through examples leading to the following laws of exponents :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^0 = 1$$

where a is a rational number and m and n are whole numbers; use of exponential notation.

UNIT X : SPECIAL PRODUCTS AND FACTORING

Multiplication of a monomial and a polynomial; the following special products :

I $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

II $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$

III $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$

IV $(ax+by)(cx+dy) = acx^2+bdy^2+(ad+bc)xy$

Factoring a polynomial having common monomial factors; factoring the difference of two squares and perfect square trinomials.

UNIT XI : FORMULAE AND THEIR USE

Converting temperature from °C to °F; distance travelled by a body moving at a constant speed; some other formulae such as :

(i) $P = 4l$

(ii) $V = lbh$

(iii) $A = \frac{1}{2}bh$

(iv) $S = \frac{n(n+1)}{2}$

(v) $A = \pi r^2$

(vi) $C = 2\pi r$

where various letters have their usual meanings.

UNIT XII : SYMMETRY

Points on the axis of symmetry of two points; symmetry about a point; central symmetry; centre of symmetry; figures symmetric about a point; rotational symmetry; The students should be familiar with the following constructions using ruler and compasses :

(i) To bisect a given line segment.

(ii) To construct a perpendicular from any given point to a given line.

UNIT XIII : TRIANGLES

Sum of the angles of a triangle; sum of any two sides of a triangle; angles opposite the equal sides of a triangle, sides opposite the equal angles of a triangle; angle opposite the longer side; side opposite the greater angle; medians, altitudes, angle bisectors and perpendicular bisectors of the sides of a triangle; centroid, orthocentre, incentre, circumcentre and circumcircle of a triangle.

UNIT XIV : CONSTRUCTION OF TRIANGLES AND CONGRUENCE

Construction of a triangle when its three sides are given; SSS congruence rule.

Construction of a triangle when its two sides and the included angle are given; SAS congruence rule.

Construction of a triangle when its two angles and the included side are given; ASA congruence rule.

Construction of a right triangle when its hypotenuse and a side are given; RHS congruence rule.

Ambiguous Case.

UNIT XV : QUADRILATERALS

A quadrilateral; vertices, sides, angles, diagonals, adjacent sides and opposite sides of a quadrilateral; its interior and exterior; convex and concave quadrilaterals; sum of the angles of a quadrilateral; special types of quadrilaterals namely squares, rectangles, rhombuses, parallelograms and trapeziums.

Construction of quadrilaterals given :

(i) four sides and one diagonal
(ii) three sides and both diagonals
(iii) two adjacent sides and three angles
(iv) three sides and the two included angles

Congruence of quadrilaterals.

UNIT XVI : PARALLEL LINES AND PARALLELOGRAMS

Properties of angles formed by a transversal to two parallel lines and their converses; distance between parallel lines; properties of parallelograms.

Construction of a parallelogram given :

(i) two adjacent sides and the included angle

(ii) two adjacent sides and a diagonal

Construction of a square given :

(i) one side

(ii) one diagonal

Construction of a rectangle given :

(i) two adjacent sides

(ii) one side and one diagonal

Construction of a rhombus given :

(i) one side and one diagonal

(ii) one side and one angle

(iii) two diagonals

Construction of a trapezium.

UNIT XVII : AREAS

Concept of area; units of area; area of a rectangle, square, parallelogram, triangle, rhombus and trapezium.

Formulae to be given.

UNIT XVIII : CIRCLES

Perpendicular from the centre to a chord; equidistant chords; angle in a semicircle; angle subtended by an arc at the centre; central angle; angles in the same segment; cyclic quadrilateral; concyclic points; opposite angles of a cyclic quadrilateral.

UNIT XIX : SQUARES AND SQUARE ROOTS

Number of digits in the square of a natural number; number of digits in the square root of a natural number; square roots of perfect square natural numbers by division method; squares of rational numbers; square roots of perfect square rational numbers.

UNIT XX : INTRODUCTION TO COORDINATES

Rectangular coordinates : quadrants; coordinate plane; x-coordinate, y-coordinate; plotting of points.

UNIT XXI : ARITHMETIC IN DAILY LIFE

Applications of ratios, proportions and percentage to topics such as profit and loss, simple interest, etc., at a level higher than earlier classes; unitary method; time and work; time and distance; average.

UNIT XXII : STATISTICAL DATA AND THEIR REPRESENTATIONS

Pictorial representation : pictographs; reading a pictograph; making a pictograph; bar charts.

उत्तरमाला

प्रश्नावली 12.1

4 स्थिति (i) में M, l और AB का प्रतिच्छेद बिन्दु है; स्थिति (ii) में M, l और A′B का प्रतिच्छेद बिन्दु है; **5.** (i) बिन्दुओं A और B की सममिति रेखा तथा रेखा l का प्रतिच्छेद बिन्दु जहाँ A और B गाँव हैं तथा l सड़क है, (ii) l और A′B का प्रतिच्छेद बिन्दु जहाँ A′, A का l के सापेक्ष सममित है; **6.** हाँ; **7.** हाँ; **8.** हाँ; **12.** नहीं; हाँ, 0°, 120°, 240° और 360°; **13.** H, I, N, O, S, X और Z

प्रश्नावली 12.2

1. 3.2 सें० मी०; **3.** 1.5 सें० मी०; **4.** 3 सें० मी०; **5.** PL सबसे छोटा है

प्रश्नावली 13.1

1. (i) 72° (ii) 77° (iii) 65° (iv) 45° (v) 40°; **2.** समकोण त्रिभुज; **3.** 45°, 45°, 90°; **4.** (i), (iii) और (iv) में संभव, (ii), (v) और (vi) में असंभव

प्रश्नावली 13.2

1. 54°, 54°; **2.** हाँ, 50°; **3.** समकोण के सम्मुख, अधिक कोण के सम्मुख; **4.** (i) हाँ (ii) हाँ (iii) हाँ (iv) हाँ; **5.** (i) और (iii); **6.** (i) ∠A, ∠B, ∠C (ii) ∠C, ∠B, ∠A (iii) ∠A, ∠B, ∠C (iv) ∠B, ∠A, ∠C **7.** (i) AC, BC, AB (ii) AC, AB, BC (iii) BC, AB, AC (iv) BC, AC, AB (v) BC, AB, AC

प्रश्नावली 13.3

3. हाँ, हाँ, हाँ; **4.** हाँ; **5.** हाँ; **6.** हाँ, हाँ; **7.** (i) केन्द्रक (ii) लम्बकेन्द्र (iii) अंत:केन्द्र (iv) परिकेन्द्र

प्रश्नावली 14.1

1. (i) विषमबाहु (ii) समद्विबाहु (iii) समबाहु (iv) हाँ

प्रश्नावली 14.4

2. 30°, 60°

प्रश्नावली 15.1

1. हाँ, हाँ; **3.** हाँ; **4.** हाँ

प्रश्नावली 15.2

1. 120°; **2.** (क) और (घ); **3.** (i) हाँ (ii) हाँ (iii) हाँ (iv) हाँ (v) हाँ

प्रश्नावली 16.1

3. हाँ, हाँ; **4.** हाँ, हाँ, हाँ, हाँ; **5.** हाँ, हाँ

प्रश्नावली 16.2

3. हाँ; **4.** हाँ

प्रश्नावली 17.1

1. (i) 16.66 वर्ग सें० मी० (ii) 24.2 वर्ग सें० मी० (iii) 124000 वर्ग सें० मी० (iv) 16650 वर्ग सें० मी०; **2.** (i) 18.49 वर्ग सें० मी० (ii) 44100 वर्ग सें० मी० (iii) 39.69 वर्ग सें० मी० (iv) 32.49 वर्ग सें० मी०; **3.** (i) 3.5 सें० मी० (ii) 11.5 मी०; **4.** 6 सें० मी०; **5.** (i) 125 मी० (ii) 100 मी० (iii) 50 मी०; **6.** 224 वर्ग मी०; **7.** 3000 रु०; **8.** 1600; **9.** 1621.62 रु०; **10.** 1836 रु०; **11.** 1900 वर्ग मी०; **12.** 18528 रु०; **13.** 74625 रु०

प्रश्नावली 17.2

1. (i)38.22 वर्ग सें० मी० (ii) 81.27 वर्ग मी० (iii) 2275 वर्ग मि० मी०; **2.** 22 सें० मी०

प्रश्नावली 17.3

1. (i) 91.015 वर्ग सें० मी० (ii) 9.35 वर्ग सें० मी० (iii) 42000 वर्ग सें० मी०; **2.** (i) 143.17 वर्ग सें० मी० (ii) 94.815 वर्ग सें० मी०; **3.** 10 सें० मी०; **4.** 160 वर्ग सें० मी०

प्रश्नावली 17.4

1. 126 वर्ग सें॰ मी॰; **2.** 8 सें॰ मी॰

प्रश्नावली 18.1

1. हाँ; **2.** हाँ, हाँ; **3.** हाँ; **5.** (क) हाँ (ख) हाँ

प्रश्नावली 19.1

1. (क) 100, 5 अंक (ख) 999, 6 अंक; **3.** (क) 2 (ख) 5 (ग) 4 (घ) 5; **4.** (i) 29 (ii) 33 (iii) 49 (iv) 62 (v) 111 (vi) 203 (vii) 317 (viii) 345 (ix) 426 (x) 657 (xi) 808 (xii) 1111 (xiii) 3012 (xiv) 6089 (xv) 7539 (xvi) 8090 (xvii) 17007 (xviii) 16826 (xix) 10203 (xx) 20202; **5.** 121 मी॰; **6.** 178 मी॰, 89 मी॰; **7.** 6 : 5

प्रश्नावली 19.2

1. $\frac{1681}{2209}$; **2.** $\frac{11236}{42025}$; **3.** $\frac{17791524}{9042049}$; **4.** $\frac{100020001}{123445321}$;

5. $\frac{44944}{6395841}$; **6.** $\frac{7}{9}$; **7.** $\frac{6}{11}$; **8.** $\frac{13}{17}$; **9.** $\frac{10}{13}$; **10.** $\frac{12}{15}$; **11.** $\frac{23}{30}$;

12. $\frac{26}{33}$; **13.** $\frac{103}{104}$; **14.** $\frac{123}{321}$; **15.** $\frac{327}{17}$; **16.** $\frac{209}{987}$;

17. $\frac{370}{281}$; **18.** $\frac{567}{765}$; **19.** $\frac{102}{777}$; **20.** $\frac{3001}{301}$

प्रश्नावली 20.1

1. II, IV, III, IV, I; **4.** आयत; **5.** हाँ; **6.** इनसे एक त्रिभुज बनता है; **7.** हाँ; **9.** वे y-अक्ष पर स्थित हैं; **10.** वे x-अक्ष पर स्थित हैं;

11. (क) सत्य (ख) सत्य (ग) सत्य (घ) असत्य (ङ) सत्य (च) सत्य

प्रश्नावली 21.1

1. 120 रु॰, 500 रु॰, 6 : 25; **2.** 42 रु॰; **3.** 6 : 5; **4.** 5 : 2; **5.** 4 : 7; **6.** A—1000 रु॰; B—3000 रु॰; C—4000 रु॰

प्रश्नावली 21.2

1. (i) 8 (ii) 21 (iii) 11 (iv) 35 (v) 4 (vi) 33 (vii) 16; **2.** 32; **3.** (क) 5 मी० (ख) 20 मी०; **4.** $17\frac{1}{2}$ सें० मी०; **5.** 187.5 डालर; **6.** 15 मिनट; **7.** $x=6$, $y=12$; **8.** -42; **9.** (i) $-\frac{1}{2}$ (ii) $-\frac{4}{15}$; **10.** (i) 4.9 (ii) 78.4 (iii) 5

प्रश्नावली 21.3

1. 250 अंक; **2.** (क) 60% (ख) 1 (ग) 1000; **3.** 90; **4.** 32; **5.** 3%; **6.** 1.8 मी०; **7.** 70

प्रश्नावली 21.4

1. 7.20 रु०, 15%; **2.** 513 रु०; **3.** 380 रु०; **4.** 35000 रु०; **5.** $16\frac{2}{3}$% **6.** 20 रु० हानि; **7.** 550 रु०, 66 रु०; **8.** 25000 रु०

प्रश्नावली 21.5

1. 98 रु०, 1792 रु०; **2.** 6%; **3.** 2000 रु०; **4.** 9%; **5.** $1\frac{1}{2}$ वर्ष; **6.** 10%; **7.** 5%; **8.** 20 वर्ष

प्रश्नावली 21.6

1. 288 कि० मी०; **2.** 60%; **3.** 80 कि० मी०; **4.** 4 घंटे; **5.** 6215 रु०; **6.** 66 कि० मी० प्रति घंटा; **7.** 10 दिन; **8.** 57848 रु०

प्रश्नावली 21.7

1. $\frac{7}{9}$ दिन; **2.** $1\frac{5}{7}$ घंटे; **3.** $9\frac{1}{3}$ दिन; **4.** 6 दिन; **5.** 14 दिन; **6.** 12 दिन; **7.** 6 दिन; **8.** 12 कि० मी०; **9.** 3 मिनट; **10.** 11 कि० मी०, **11.** प्रातः काल 10 बजे; **12.** $1\frac{7}{9}$ घंटे

प्रश्नावली 21.8

1. 34 अंक; **2.** 29 रु०; **3.** 8.50 रु०; **4.** 150 सें० मी०; **5.** 3 किलोग्राम; **6.** 345 टेलीफून; **7.** 3.21 मि० मी०; **8.** 25.81°C; **9.** 11 विद्यार्थी; **10.** 13 वर्ष 9 महीने; **11.** 50 कि० मी० प्रति घंटा; **12.** 23; **13.** 21; **14.** -15; **15.** (क) 2 (ख) $\frac{5}{2}$ (ग) 3 (घ) $\frac{7}{2}$

पारिभाषिक शब्दावली

अंक	digit
अंतः केन्द्र	incentre
अंतः कोण	interior angle
अंतः प्रविष्ट	re-entrant
अंतः समद्विभाजक	internal bisector
अंश	numerator
अक्ष	axis
अक्षांश	latitude
अधिक कोण	obtuse angle
अनुक्रमानुपात	direct variation
अनुदिश	along
अनुपात	ratio
अभ्यंतर	interior
अभिगृहीत	postulate
अर्धवृत्त	semicircle
अवतल	concave
अवयव	element
असममित	non-symmetric
असमान	unequal
आँकड़े	data
आकार	shape
आकृति	figure
आधार	base
आनुपातिक स्थिरांक	constant of proportionality
आयत	rectangle

आलेख	graph
आलेखन	plotting
आसन्न भुजाएँ	adjacent sides
इकाई/एकक/मात्रक	unit
इकाई की विधि	unitary method
उत्तल	convex
उपपत्ति	proof
ऊँचाई	height
ऋजु कोण	straight angle
ऋजुरेखीय	rectilinear
एकांतर कोण	alternate angles
औसत	average
कर्ण	hypotenuse
काम	work
केन्द्र	centre
केन्द्रक	centroid
केन्द्रीय कोण	central angle
केन्द्रीय सममिति	central symmetry
कोटि	ordinate
कोण	angle
क्रमागत	consecutive
क्रय मूल्य	cost price
क्षेत्रफल	area
गणित	mathematics
गुणनखंड की विधि	factor method
घात	power
घूर्णन	rotation
घूर्णन सममिति	rotational symmetry
चक्रीय चतुर्भुज	cyclic quadrilateral
चक्रीय बिंदु	concyclic points
चतुर्थांश	quadrant

चतुर्भुज	quadrilateral
चतुर्भुजीय क्षेत्र	quadrilateral region
चाप	arc
चित्रालेख	pictograph
चिन्ह	sign/symbol
चौड़ाई	breadth/width
जीवा	chord
जैविकी	biology
तदनुरूपी/संगत	corresponding
तल	plane
तापमान	temperature
तिर्यक रेखा	transversal
त्रिज्यखंड	sector
त्रिज्या	radius
त्रिभुज	triangle
दक्षिणावर्त	clockwise
दण्ड आलेख	bar graph
दण्ड चार्ट	bar chart
दर	rate
दर्पण प्रतिबिम्ब	mirror image
दशांश	tenth
दिशा	direction
दीर्घ चाप	major arc
दूरी	distance
निरूपण	representation
निर्देशांक	coordinate
न्यून कोण	acute angle
परिकेन्द्र	circumcentre
परिधि	cicrumference
परिमाप	perimeter
परित्रिज्या	circumradius

परिगत वृत्त	circumscribed circle
परिवृत्त	circumcircle
परिशिष्ट	appendix
पर्यवेक्षण	observation
पाद	foot
पूर्ण वर्ग	perfect square
प्रतिच्छेद बिंदु	point of intersection
प्रतिवर्ती	reflex
प्रतिशत	percent
बराबर/समान	equal
ब्याज	interest
बहिर्भाग	exterior
बाह्य कोण	exterior angle
बिंदु	point
भाग की विधि	division method
भुज	abscissa
भुजा	side
भौतिकी	physics
माध्यिका	median
मापन	measurement
मिश्रधन	amount
मूलधन	principal
मूलबिंदु	origin
मैट्रिक	metric
युग्म	pair
योग	sum/addition
रचना	construction
रसायन	chemistry
रेखा	line
रेखांश	longitude
रेखाखंड	line segment/segment
रैखिक सममिति	linear symmetry

लघु चाप	minor arc
लम्ब	perpendicular
लम्बकेन्द्र	orthocentre
लम्ब समद्विभाजक	perpendicular bisector/right bisector
लम्बाई	length
लाभ	profit
वर्ग	square
वर्गमूल	square root
वृत्त	circle
वृत्त-खंड	segment of a circle
वृत्त चार्ट	pie chart
व्यास	diameter
व्युत्क्रमानुपात	indirect variation
वामावर्त	anticlockwise
वाष्पीकरण	evaporation
विक्रय मूल्य	selling price
विकर्ण	diagonal
विनिमय दर	rate of exchange
विलोम	converse
विषम	odd
विषमबाहु	scalene
शीर्ष	vertex
शीर्षकोण	vertical angle
शीर्षलम्ब	altitude
संकल्पना	concept
संकेन्द्रीय वृत्त	concentric circles
संगामी	concurrent
संदिग्ध स्थिति	
संपाती	
संपूरक	
सम	
समकोण	

समकोणिक निर्देशांक	rectangular coordinates
समचतुर्भुज	rhombus
समद्विबाहु	isosceles
समद्विभाजक	bisector
समदूरस्थ	equidistant
समबाहु	equilateral
सम्मुख	opposite
समय	time
समलंब	trapezium
सममित	symmetric
सममिति	symmetry
सममिति केन्द्र	centre of symmetry
समांतर	parallel
समांतर चतुर्भुज	parallelogram
समानुपात	proportion
सर्वांगसम	congruent
सर्वांगसमता	congruence
सांख्यकीय आँकड़े	statistical data
साइज	size
साधारण ब्याज	simple interest
सीमा	boundary
सूत्र	formula
हर	denominator
हाऊस	house
हानि	loss